

CH. BIEHLER

**Sur la construction d'une courbe algébrique
autour d'un de ses points [suite]**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 397-412

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_397_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA CONSTRUCTION D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE
AUTOUR D'UN DE SES POINTS**

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

II.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

1. Soient

$F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe;

(1) Voir même Tome, p. 354.

$f(x, y)$ l'ensemble homogène des termes de degré m de \mathbf{F} ;

$g(x, y)$ l'ensemble homogène des termes de degré $m - 1, \dots$

L'équation de la courbe sera de la forme

$$(1) \quad f(x, y) + g(x, y) + h(x, y) + \dots = 0.$$

Coupons la courbe par la droite

$$\begin{aligned} x &= x_0 - ar. \\ y &= y_0 - br. \end{aligned}$$

L'équation de degré m qui nous fournit les m valeurs de r qui conviennent aux points d'intersection de la droite et de la courbe est de la forme

$$(2) \quad U_0 r^m + U_1 r^{m-1} + U_2 r^{m-2} + \dots + U_m = 0.$$

Les coefficients U_0, U_1, U_2, \dots sont des fonctions de x_0, y_0 dont le degré est marqué par l'indice et qui ont pour expression

$$\begin{aligned} U_0 &= f(a, b), \\ U_1 &= x_0 f'_a + y_0 f'_b - g(a, b), \\ U_2 &= \frac{1}{1.2} [x_0^2 f''_{aa} + 2x_0 y_0 f''_{ab} + y_0^2 f''_{bb} - 2x_0 g'_a - 2y_0 g'_b + h(a, b)], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Cela posé, si la transversale est choisie de manière que $f(a, b) = 0$, l'une des racines de cette équation devient infinie, et, pour qu'un second point de rencontre de la droite avec la courbe passe à l'infini, il faut en outre que $U_1 = 0$. c'est-à-dire que le point (x_0, y_0) soit situé sur la droite

$$(3) \quad x f'_a - y f'_b + g(a, b) = 0.$$

Nous allons démontrer que, si les coordonnées x_0, y_0 , n'annulent pas U_2 , la courbe $F(x, y) = 0$ est asymptote

à la droite dont l'équation est

$$xf'_a + yf'_b + g(a, b) = 0.$$

Soient r_1, r_2, \dots, r_{m-1} les $m - 1$ racines de l'équation

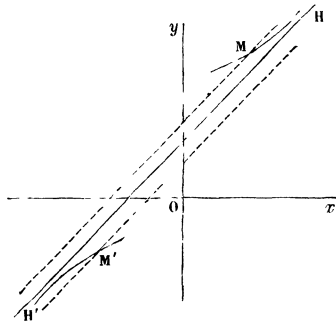
$$(1) \quad U_1 r^{m-1} + U_2 r^{m-2} + \dots + U_m = 0.$$

On aura

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{m-1} = -\frac{U_2(x_0, y_0)}{U_1(x_0, y_0)}.$$

Quand U_1 tend vers zéro, c'est-à-dire quand la transversale se déplace parallèlement à la droite (3), jusqu'à coïncider avec cette droite, une seule racine de l'équation (4) tend vers l'infini. Soit r_1 cette racine, elle a évidemment le signe de $-\frac{U_2}{U_1}$; elle engendre une branche de courbe asymptote à la droite. Lorsque U_1 change de signe, c'est-

Fig. 1.



à-dire lorsque la transversale passe de l'autre côté de la droite (3), on obtient sur cette transversale un point dans une direction opposée à la première, et ce point engendre une seconde branche de courbe asymptote à la même droite.

On obtient une disposition analogue à celle que présente

la fig. 1, et le signe des quantités $\frac{U_2}{U_1}$ et U_1 donne la disposition de la courbe par rapport à l'asymptote. Si U_2 n'est pas divisible par U_1 , on peut substituer à la place de x_0, y_0 dans U_2 les coordonnées d'un point de l'asymptote et prendre pour le signe invariable de U_2 le signe que prendra cette fonction quand on y substitue les coordonnées de ce point.

2. Supposons maintenant que la fonction U_2 soit divisible par U_1 , et soit

$$U_2 = U_1 V_1.$$

Lorsque U_1 tend vers zéro, deux racines de l'équation (4) tendent vers l'infini; supposons que U_3 ne soit pas divisible par U_1 ; U_3 conservera un signe invariable quand le point (x_0, y_0) se déplacera dans le voisinage de l'asymptote.

Soient r_1, r_2 les deux racines qui augmentent indéfiniment, on aura les relations

$$(a) \quad r_1 + r_2 = -(V_1 - S_1),$$

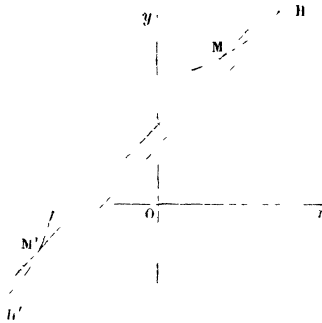
$$(b) \quad r_1 r_2 = \frac{U_3}{U_1} - (V_1 + S_1) S_1 - S_2,$$

$$(c) \quad (r_1 - r_2)^2 = (V_1 - S_1)^2 - 4 \frac{U_3}{U_1} - 4 S_1 (V_1 + S_1) + 4 S_2,$$

S_1 étant la somme des racines r_3, r_4, \dots, r_{m-1} et S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités. On voit par ces formules que r_1 et r_2 ne sont réels qu'autant que U_3 et U_1 sont de signe contraire, car c'est le terme $-4 \frac{U_3}{U_1}$ qui donne son signe au second membre; la formule (a) nous montre de plus que r_1 et r_2 sont de signe contraire. La courbe est donc tout entière d'un même côté de l'asymptote, et la formule (c) nous indique

quel est ce côté. On obtient un point d'inflexion à l'infini et des branches de courbes analogues à celle de la *fig. 2*.

Fig. 2.



3. Supposons maintenant que U_1 soit identiquement nul, U_2 sera décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré, et l'équation $U_2(x, y) = 0$, qui, dans le cas précédent, représente une hyperbole ayant pour l'une de ses asymptotes la droite HH' représentée par l'équation (3), représente maintenant un système de deux droites parallèles, comme il est aisé de le faire voir. L'équation $U_3(x, y) = 0$ représente une courbe du troisième degré qui a pour asymptotes les deux parallèles représentées par $U_2(x, y) = 0$; U_3 conserve donc un signe invariable quand on substitue, pour x_0, y_0 , les coordonnées d'un point suffisamment voisin de l'une des deux droites

$$U_2(x, y) = 0.$$

Soit $U_2 = UV$, U et V étant les deux fonctions linéaires qui sont les premiers membres des équations des deux parallèles représentées par $U_2 = 0$.

On verra, comme dans le premier cas, que chacune des deux droites $U = 0$, $V = 0$ est accompagnée de branches de courbe asymptotes à chacune de ces droites et la disposition des branches autour de chaque asymptote est

donnée par la formule

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{m-2} = -\frac{U_3}{UV},$$

le signe de la racine r_1 qui augmente indéfiniment étant donné dans les deux cas par le signe du second membre.

La courbe se construit donc séparément autour de chaque asymptote.

4. Supposons maintenant que $U_2(x, y)$ soit le carré d'une fonction linéaire

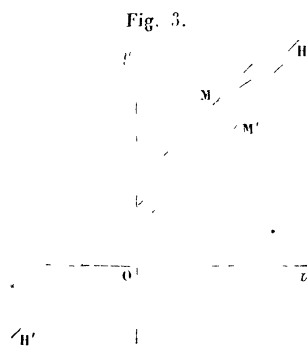
$$U_2 = U^2.$$

La racine qui augmente indéfiniment ne change pas de signe quand le point (x_0, y_0) passe d'un côté à l'autre de la droite $U = 0$; on obtient dans ce cas deux branches de courbe asymptotes de part et d'autre à cette droite et dans la même direction.

Le point est de rebroussement à l'infini et la formule

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{m-2} = -\frac{U_3}{U^2}$$

nous donne, par le signe permanent du deuxième membre,



le signe de la racine infiniment grande, et par suite la région où se trouve la courbe. On obtient la *fig. 3.*

5. Supposons U_1 divisible par U et soit

$$U_3 = U V_2.$$

L'équation aux rayons vecteurs prend la forme

$$(5) \quad r^{m-2} U^2 + r^{m-3} U V_2 + r^{m-4} U_4 + \dots + U_m = 0$$

Quand U tend vers zéro, deux racines r_1 et r_2 de l'équation (5) tendent vers zéro, et l'on a, comme précédemment, les relations

$$(a') \quad r_1 + r_2 = - \left(\frac{V_2}{U} - S_1 \right),$$

$$(b') \quad r_1 r_2 = \frac{U_4}{U^2} - \left(\frac{V_2}{U} - S_1 \right) S_1 - S_2,$$

$$(c') \quad (r_1 - r_2)^2 = \left(\frac{V_2}{U} - S_1 \right)^2 - 4 \left[\frac{U_4}{U^2} - \left(\frac{V_2}{U} - S_1 \right) S_1 - S_2 \right]$$

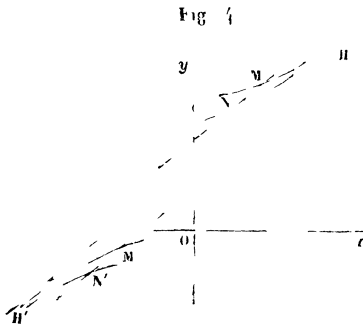
La formule (c') peut aussi s'écrire

$$(c_1) \quad (r_1 - r_2)^2 = \frac{V_2^2 - 4U_4}{U^2} - \frac{UW}{U^2},$$

où l'on a posé

$$W = -2V_2 S_1 - U(S_2 - 3S_1^2).$$

Si $V_2^2 - 4U_4 > 0$, les racines r_1 et r_2 sont réelles, et,

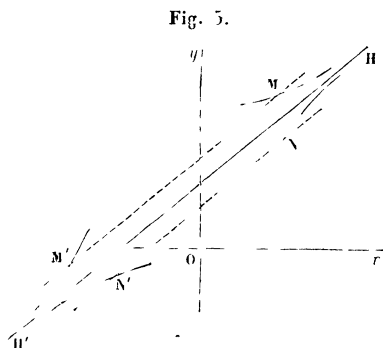


suitant que U_4 est positif ou négatif, on obtient des dispositions de courbes représentées par les *fig.* 4 ou 5.

Le signe de V_2 nous donne, dans le cas de la *fig. 4*, la position des branches de courbe.

L'asymptote dans ce cas est double et de rebroussement.

Si $V_2^2 - 4U_4 < 0$, les racines r_1 et r_2 sont imaginaires, aucune branche réelle de courbe n'accompagne



l'asymptote. Le point de rebroussement à l'infini est isolé.

Si $V_2^2 - 4U_4 = 0$, la fonction $V_2^2 - 4U_4$ est divisible par U .

Soit Q le quotient. La formule (c'_1) devient alors

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{Q - 2V_2S_1 - U(S_2 - 3S_1^2)}{U};$$

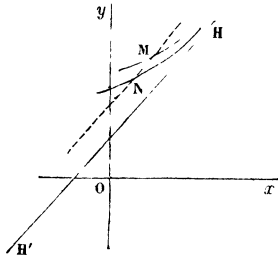
pour que r_1 et r_2 soient réels, il faut que $Q - 2V_2S_1$ soit de même signe que U ; on n'obtient donc de points de la courbe que d'un côté de l'asymptote. De plus, les racines r_1 et r_2 sont de même signe; l'égalité $V_2^2 - 4U_4 = 0$ montre en effet que U_4 est positif.

On obtient un rebroussement de deuxième espèce; la formule (a') donne la position de la courbe avec (c'_1) .

Le cas où plus de deux racines augmentent indéfini-

ment se traite de la même manière que pour le point à distance finie. L'analogie entre la discussion du point à

Fig. 6.



l'infini et celle du point à distance finie est d'ailleurs complète.

6. Nous allons, en terminant, montrer que la méthode de Cauchy se prête à une discussion toute semblable.

Soient toujours

$$(1') \quad F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + h(x, y) + \dots = 0$$

l'équation de la courbe,

$$y = ax + \lambda$$

l'équation d'une droite quelconque.

L'équation qui donne les abscisses des points communs à cette droite et à la courbe est

$$f(x, ax + \lambda) + g(x, ax + \lambda) + h(x, ax + \lambda) + \dots = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} x^m f\left(1, a + \frac{\lambda}{x}\right) + x^{m-1} g\left(1, a + \frac{\lambda}{x}\right) \\ + x^{m-2} h\left(1, a + \frac{\lambda}{x}\right) + \dots = 0 \end{aligned}$$

En développant les coefficients des diverses puissances de x par la formule de Taylor, on obtient l'équation

$$x^m f(1, a) + x^{m-1} [\lambda f'(1, a) + g(1, a)] \\ + x^{m-2} \left[\lambda^2 f'' \frac{(1, a)}{1.2} + \frac{\lambda}{1} g'(1, a) + h(1, a) \right] + \dots = 0.$$

Si a est une direction asymptotique $f(1, a) = 0$, l'équation aux abscisses prend la forme

$$x^{m-1} U_1(\lambda) + x^{m-2} U_2(\lambda) + \dots + U_m(\lambda) = 0.$$

En posant

$$U_1(\lambda) = \lambda f'(1, a) + g(1, a), \\ U_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{1.2} f''(1, a) + \frac{\lambda}{1} g'(1, a) + h(1, a),$$

on obtient ainsi une équation qui se prête à une discussion identique à celle que nous avons faite sur l'équation aux rayons vecteurs.

On voit que les circonstances que nous avons étudiées précédemment se représenteront ici dans le même ordre; il est donc inutile de nous y arrêter, et nous allons passer à l'étude des branches de courbes dépourvues d'asymptotes et correspondant à des directions multiples de points à l'infini.

La méthode que nous emploierons peut également servir à construire les branches hyperboliques, c'est-à-dire accompagnées d'asymptotes, et en cela elle est remarquable.

Il n'y a d'exception que pour le cas où l'asymptote passe par l'origine, et ce cas peut toujours être étudié directement avec une grande facilité.

III.

BRANCHES PARABOLIQUES.

1. Soit

$$(1) \quad F(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \dots + f_0(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe.

$f_\mu(x, y)$ désigne l'ensemble homogène des termes de degré μ de $F(x, y)$.

Soit

$$y = ax + \frac{1}{\lambda}$$

une transversale quelconque.

Formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de concours de la droite et de la courbe.

L'équation de ce faisceau sera, comme l'on sait,

$$(2) \quad \begin{cases} f_m(x, y) + \lambda(y - ax)f_{m-1}(x, y) \\ + \lambda^2(y - ax)^2 f_{m-2}(x, y) + \dots + \lambda^m(y - ax)^m f_0 = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$(3) \quad \begin{cases} f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{y}{x} - a\right)f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots \\ + \lambda^m\left(\frac{y}{x} - a\right)^m f_0 = 0 \end{cases}$$

Posons

$$f_\mu\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_\mu\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} - a = t,$$

on aura pour l'équation du faisceau

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_m(a + t) + \lambda t \varphi_{m-1}(a + t) \\ + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(a + t) + \dots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_m(\alpha) \\ + t [\varphi'_m(\alpha) + \lambda \varphi_{m-1}(\alpha)] \\ + t^2 \left[\frac{1}{1.2} \varphi''_m(\alpha) + \lambda \varphi'_{m-1}(\alpha) + \lambda^2 \varphi_{m-2}(\alpha) \right] \\ + t^3 \left[\frac{1}{1.2.3} \varphi'''_m(\alpha) + \lambda \frac{\varphi''_{m-1}}{1.2}(\alpha) + \frac{\lambda^2}{1} \varphi'_{m-2}(\alpha) + \lambda^3 \varphi_{m-3}(\alpha) \right] \\ \dots \dots \dots = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation est de la forme

$$(6) \quad U_0 + t U_1(\lambda) + t^2 U_2(\lambda) + \dots + t^m U_m(\lambda) = 0,$$

$U_\mu(\lambda)$ étant un polynôme de degré μ en λ , à savoir :

$$U_\mu(\lambda) = \frac{1}{\mu!} \varphi_m^{(\mu)}(\alpha) + \frac{\lambda}{(\mu-1)!} \varphi_{m-1}^{(\mu-1)}(\alpha) + \frac{\lambda^2}{(\mu-2)!} \varphi_{m-2}^{(\mu-2)}(\alpha) + \dots + \lambda^\mu \varphi_{m-\mu}(\alpha).$$

Si α est une direction de points à l'infini

$$\varphi_m(\alpha) = 0,$$

par suite, l'équation (6) est divisible par t , et, après la suppression du facteur t , elle devient

$$(7) \quad U_1(\lambda) + t U_2(\lambda) + \dots + t^{m-1} U_m(\lambda) = 0;$$

Si $\varphi'_m(\alpha) \geq 0$, et si $U_2(\lambda)$ n'est pas divisible par $U_1(\lambda)$, une seule des racines de l'équation en t tendra vers zéro quand λ tend vers la racine λ_0 de l'équation

$$U_1(\lambda) = 0.$$

Cette racine engendre une branche hyperbolique asymptote à la droite

$$y = ax + \frac{1}{\lambda_0},$$

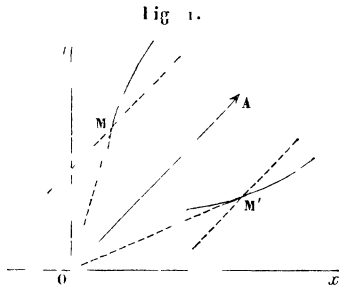
et la discussion de l'équation (7) donne la position des branches par rapport à l'asymptote. Nous ne nous y ar-

rèterons pas, et nous allons supposer immédiatement que cette racine λ_0 de U_1 soit nulle, c'est-à-dire $\varphi'_m(a) = 0$.

Dans ce cas, quand λ tend vers zéro, une seule racine de l'équation en t tend vers zéro [$U_2(\lambda)$ n'étant pas divisible par λ]; le signe de cette racine est donné par l'égalité

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{m-1}} = - \frac{U_2(\lambda)}{U_1(\lambda)}.$$

La racine t_1 qui tend vers zéro a évidemment le signe de $-\frac{\varphi'_m(a)}{\lambda \varphi_{m-1}(a)}$; elle engendre une branche parabolique qui a la disposition de la *fig. 1* où l'on suppose $\frac{\varphi''_m(a)}{\varphi_{m-1}(a)} < 0$.



Si l'on suppose U_1 et U_2 divisibles par λ , on obtient l'analogie du point d'inflexion; les deux branches sont toutes deux d'un même côté de OA : on le reconnaît aisément. Dans ce cas, deux racines de l'équation (7) tendent vers zéro.

2. Si U_1 est identiquement nul, $U_2(\lambda)$ étant, en général, décomposable en facteurs du premier degré,

$$U_2 = UV,$$

chacune des racines λ_0 et λ_1 de l'équation $U_2(\lambda) = 0$ donne une asymptote à des branches hyperboliques de courbe que nous construirons comme précédemment. Mais si l'une de ces racines est nulle, à la racine non nulle correspond une branche hyperbolique et à la racine nulle une branche parabolique aisée à construire si U_3 n'admet pas λ en facteur.

La forme de la courbe sera celle de la *fig. 1*.

3. Supposons maintenant que les deux racines de l'équation $U_2(\lambda)$ soient nulles, et $U_3(\lambda)$ non divisible par λ ; la racine t_1 qui tend vers zéro a le signe de

$$-\frac{\varphi_m'(\alpha)}{\varphi_{m-2}(\alpha)},$$

et ce signe est le même, quel que soit le signe de λ . On obtient donc une branche de courbe de la forme de la

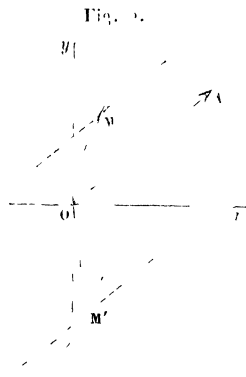


fig. 2 qui correspond au rebroussement de première espèce. Nous avons, pour cela, supposé

$$\begin{aligned} \varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_m'(\alpha) = 0, \quad \varphi_m''(\alpha) = 0, \\ \varphi_{m-1}(\alpha) \neq 0, \quad \varphi_{m-1}'(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

4. Supposons $U_3(\lambda)$ divisible par λ ; dans ce cas, deux racines de l'équation

$$(8) \quad U_2(\lambda) + tU_3(\lambda) + t^2U_4(\lambda) + \dots + t^{m-2}U_m(\lambda) = 0$$

tendent vers zéro; on a, dans ce cas, les formules

$$(a) \quad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = - \left[\frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\varphi_{m-1}''(\alpha)}{\varphi_{m-2}(\alpha)} + \lambda \Phi_1(\lambda) \right] \frac{1}{\lambda},$$

$$(b) \quad \frac{1}{t_1 t_2} = \left[\frac{1}{4!} \frac{\varphi_m^{IV}(\alpha)}{\varphi_{m-2}(\alpha)} + \lambda \Phi_2(\lambda) \right] \frac{1}{\lambda^2},$$

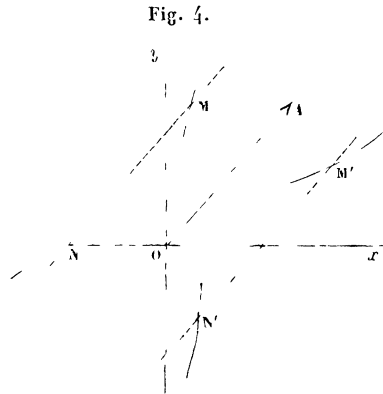
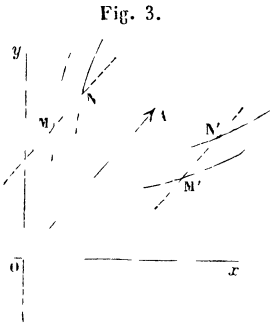
$$(c) \quad \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right)^2 = \left[\frac{\frac{1}{4} \varphi_{m-1}''^2(\alpha) - \frac{1}{6} \varphi_{m-2}(\alpha) \varphi_m^{IV}(\alpha)}{\varphi_{m-2}^2(\alpha)} + \lambda \Psi(\lambda) \right] \frac{1}{\lambda^2}.$$

Si

$$\frac{1}{4} \varphi_{m-1}''^2(\alpha) - \frac{1}{6} \varphi_{m-2}(\alpha) \varphi_m^{IV}(\alpha) > 0,$$

les racines t_1 et t_2 sont réelles et inégales; chacune d'elles, quand λ tend vers zéro, engendre une branche parabolique.

Si $\frac{\varphi_m^{IV}(\alpha)}{\varphi_{m-2}(\alpha)} > 0$, on obtient une disposition analogue à



la fig. 3, et si $\frac{\varphi_m^{IV}(\alpha)}{\varphi_{m-2}(\alpha)} < 0$, on obtient la fig. 4. Le signe

de $\frac{\varphi_{m-1}''(\alpha)}{\varphi_{m-2}(\alpha)}$ donne, dans le cas de la *fig. 3*, la région où se trouvent les courbes.

Si

$$\frac{1}{4} \varphi_{m-1}''(\alpha) - \frac{1}{6} \varphi_{m-2}(\alpha) \varphi_m''(\alpha) < 0,$$

le point à l'infini dans la direction α est isolé, les branches sont imaginaires.

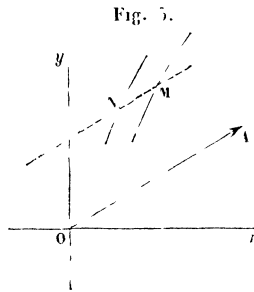
Ö. Mais, si

$$\frac{1}{4} \varphi_{m-1}''(\alpha) - \frac{1}{6} \varphi_{m-2}(\alpha) \varphi_m''(\alpha) = 0,$$

les deux racines t_1 et t_2 ne sont plus réelles, quel que soit le signe de λ ; par suite, la courbe se trouve d'un même côté de OA ; $\varphi_{m-2}(\alpha) \varphi_m''(\alpha)$ étant positif, les racines t_1 et t_2 sont de même signe.

On obtient une disposition analogue à celle de la *fig. 5*.

Les développements que nous avons donnés en traitant de la construction de la courbe autour de l'origine nous



dispensent d'entrer dans de plus amples détails. On verrait aisément comment il faudrait opérer dans des cas plus complexes que ceux que nous avons traités.