

CH. BIEHLER

**Sur la construction d'une courbe algébrique
autour d'un de ses points**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 354-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_354_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA CONSTRUCTION D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE
AUTOUR D'UN DE SES POINTS;**

PAR M. CH. BIEHLER.

Dans un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIX et XX, 2^e série), j'ai donné la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points, en cherchant les expressions approchées des racines infiniment petites, qui fournissent les coordonnées des points d'intersection de la courbe et d'une transversale passant par le point considéré. Cette méthode, d'une application très facile, offre, dans son exposition, quelques difficultés lorsqu'on veut la présenter en toute rigueur. Je me propose d'exposer, dans ce qui suit, une méthode plus simple et d'une application aussi aisée que la première, qui repose, non plus sur la recherche de l'expression des racines elles-mêmes, mais sur celle de certaines fonctions symétriques des racines.

Je supposerai que le point à étudier soit à l'origine des coordonnées lorsqu'il se trouve à distance finie.

I.

1. Soit

$$(1) \quad F(x, y) = U_1(x, y) + U_2(x, y) + \dots + U_m(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, $U_\mu(x, y)$ désignant d'une manière générale l'ensemble homogène des termes de degré μ de l'équation proposée.

Coupons la courbe par la droite

$$\begin{aligned} x &= ar, \\ y &= br \end{aligned}$$

issue de l'origine; a et b sont les coordonnées du point directeur de la droite, et r la distance, avec son signe, du point (x, y) à l'origine.

L'équation qui donne les rayons vecteurs des points d'intersection de la transversale avec la courbe sera

$$(2) \quad rU_1(a, b) + r^2U_2(a, b) + \dots + r^mU_m(a, b) = 0.$$

Cette équation est satisfaite d'une manière permanente par $r = 0$; en la débarrassant du facteur r , il vient

$$(3) \quad U_1(a, b) + rU_2(a, b) + \dots + r^{m-1}U_m(a, b) = 0.$$

Lorsque le point directeur (a, b) viendra se placer sur la droite $U_1(x, y) = 0$, une nouvelle racine de l'équation en r tendra vers zéro; et si $U_2(a, b)$ ne s'annule pas en même temps que $U_1(a, b)$, c'est-à-dire si $U_2(x, y)$ n'est pas divisible par $U_1(x, y)$, une seule racine tendra vers zéro, quelles que soient, d'ailleurs, les valeurs des coefficients $U_m(a, b)$, $U_{m-1}(a, b)$, ... des termes de degré le plus élevé. Cette racine qui tend vers zéro engendre une branche de courbe tangente à la droite $U_1(x, y) = 0$, et c'est du signe de cette racine que dépend la position de la courbe par rapport à sa tangente.

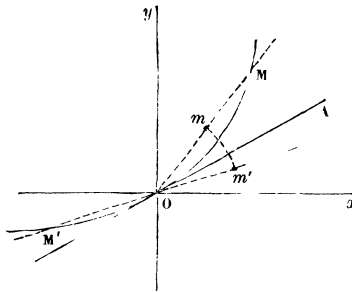
Désignons par $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{m-1}$ les racines de

l'équation (3), et soit r_1 la racine qui tend vers zéro. On aura

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{m-1}} = -\frac{U_2(a, b)}{U_1(a, b)}.$$

Le signe de r_1 est évidemment donné par le signe du second membre lorsque le point (a, b) est suffisamment voisin de la droite $U_1(x, y) = 0$; car tous les termes $\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \dots, \frac{1}{r_{m-1}}$ du premier membre restent finis, et le seul terme $\frac{1}{r_1}$ augmente indéfiniment. Lorsque le point directeur passe d'un côté à l'autre de la droite $U_1(x, y) = 0$, $U_1(a, b)$ change de signe, mais $U_2(a, b)$ ne changera pas de signe si le point (a, b) se meut dans une région angulaire suffisamment petite et voisine de $U_1(x, y) = 0$; la racine r_1 change donc de signe quand $U_1(a, b)$ passe

Fig. 1.



par zéro. Supposons que OA soit la tangente donnée par l'équation $U_1(x, y) = 0$, m le point directeur de la sécante; si les coordonnées du point m rendent $-\frac{U_2(a, b)}{U_1(a, b)}$ positif, le point M de la courbe correspondant à la racine r_1 se trouvera du même côté que m par rapport à l'origine, car la racine r_1 sera positive; si le point directeur vient en m' , la racine r_1 sera négative, et les points M'

et m' seront de part et d'autre de l'origine : la courbe aura la disposition MOM' de la fig. 1.

Si, au contraire, les coordonnées du point m rendaient $-\frac{U_2(a, b)}{U_1(a, b)}$ négatif, la courbe serait située de l'autre côté de la tangente, et, comme précédemment, tout entière du même côté de la droite.

2. Supposons maintenant que $U_2(x, y)$ soit divisible par $U_1(x, y)$, et soit

$$U_2(x, y) = U_1(x, y) \times V_1(x, y).$$

L'équation (3) devient, dans ce cas,

$$(4) \quad U_1 + rU_1V_1 + r^2U_3 + \dots + r^{m-1}U_m = 0,$$

en posant, pour abrégier,

$$U_\mu = U_\mu(a, b).$$

Quand U_1 tendra vers zéro, deux des racines de l'équation (4) tendront vers zéro; soient r_1 et r_2 ces racines, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + S_1 &= -V_1, \\ \frac{1}{r_1 r_2} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) S_1 + S_2 &= \frac{U_3}{U_1}, \end{aligned}$$

en désignant, pour abrégier, par S_1 la somme

$$S_1 = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \dots + \frac{1}{r_{m-1}},$$

et par S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités

$$S_2 = \frac{1}{r_3 r_4} + \dots + \frac{1}{r_{m-2} r_{m-1}},$$

les sommes S_1 et S_2 restent finies quand U_1 passe par zéro.

Les formules précédentes peuvent s'écrire

$$(a) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -(V_1 + S_1),$$

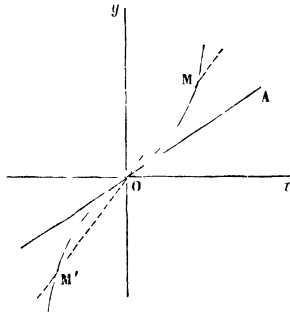
$$(b) \quad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{U_3}{U_1} + (V_1 + S_1)S_1 - S_2,$$

et de ces deux formules on déduit la suivante :

$$(c) \quad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 = (V_1 + S_1)^2 - 4 \left[\frac{U_3}{U_1} + (V_1 + S_1)S_1 - S_2 \right].$$

Tous les termes qui figurent dans le second membre de cette dernière équation restent finis, excepté le terme $-4 \frac{U_3}{U_1}$, qui augmente indéfiniment quand U_1 passe par zéro, si, comme nous le supposons, U_3 n'est pas divisible par U_1 . Le signe du second membre est donc donné par le terme $-4 \frac{U_3}{U_1}$. Ce terme change de signe avec U_1 , et,

Fig. 2.



par suite, le premier membre change de signe. Les racines r_1 et r_2 sont donc réelles quand le point directeur est du côté de la droite $U_1(x, y) = 0$ pour lequel $-4 \frac{U_3}{U_1}$ est positif, et elles sont imaginaires de l'autre. De plus, la formule (a) nous montre que ces racines

sont de signes contraires; car $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ augmentent indéfiniment, et leur somme reste finie; la formule (c) indique par le signe de $-\frac{U_3}{U_1}$ de quel côté de la tangente doit se trouver le point directeur pour que les racines soient réelles; elle permet donc, dans tous les cas, de construire la courbe, qui présente par rapport à la tangente la disposition de la *fig. 2*; le point est d'inflexion.

3. Supposons U_1 identiquement nul et U_2 égal à un produit de deux facteurs réels distincts,

$$U_2 = UV.$$

L'équation (3) prend la forme

$$(5) \quad UV + rU_3 + \dots + r^{m-2}U_m = 0.$$

Si U_3 n'est divisible ni par U , ni par V , une seule des racines de l'équation (5) tendra vers zéro lorsque le point directeur franchira la droite $U(x, y) = 0$ ou la droite $V(x, y) = 0$; par suite, le signe de la racine qui tend vers zéro sera encore donné par l'équation

$$(a') \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{m-2}} = -\frac{U_3}{UV},$$

car $\frac{1}{r_1}$ donne son signe au second membre. On voit aisément que l'origine est un point double réel; les branches de courbe qui se croisent en ce point sont situées d'un même côté de leurs tangentes respectives, comme pour le point simple; et le signe de la quantité $-\frac{U_3}{UV}$ donne la position de chacune des branches par rapport à sa tangente lorsqu'on y substitue successivement les coordonnées d'un point directeur voisin de chacune des deux tangentes.

Si les deux facteurs dans lesquels se décompose U_2 sont imaginaires, l'origine est un point isolé, car l'équation (5) n'a pas de racines réelles voisines de zéro.

4. Si les deux facteurs de U_2 sont égaux, U_2 sera le carré d'une fonction linéaire U ; l'équation aux rayons vecteurs prendra alors la forme

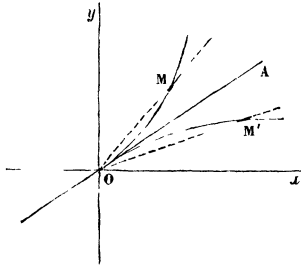
$$(6) \quad U^2 + rU_3 + r^2U_4 + \dots + r^{m-2}U_m = 0.$$

Si U_3 n'est pas divisible par U , une seule racine de l'équation (6) tendra vers zéro, et la formule

$$(a'') \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{m-2}} = -\frac{U_3}{U^2}$$

nous montre que cette racine ne change pas de signe quand U passe par zéro, c'est-à-dire quand le point directeur franchit la droite $U(x, y) = 0$. Le signe de U_3 fournit le signe permanent de cette racine, laquelle en-

Fig. 3.



gendre évidemment les branches MOM' de la courbe (fig. 3). On pourra donc, connaissant le signe de U_3 , déterminer la position de la courbe.

5. Supposons actuellement $U_3(a, b)$ divisible par U , et soit

$$U_3 = U \cdot V_2,$$

l'équation aux rayons vecteurs prend la forme

$$(7) \quad U^2 + rUV_2 + r^2U_4 + \dots + r^{m-2}U_m = 0,$$

où nous supposons U_4 non divisible par U .

Quand U tend vers zéro, deux racines de l'équation en r tendent vers zéro; soient r_1 et r_2 ces racines, on aura, comme précédemment, les formules

$$(a_1) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = - \left(\frac{V_2}{U} + S_1 \right),$$

$$(b_1) \quad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{U_4}{U^2} + \left(\frac{V_2}{U} + S_1 \right) S_1 - S_2,$$

$$(c_1) \quad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{V_2}{U} + S_1 \right)^2 - 4 \left[\frac{U_4}{U^2} + \left(\frac{V_2}{U} + S_1 \right) S_1 - S_2 \right].$$

La formule (c_1) est évidemment de la forme

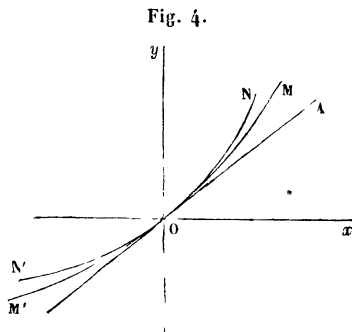
$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 = \frac{V_2^2 - 4U_4 + UW}{U^2},$$

W étant la somme

$$W = -2V_2S_1 + U(4S_2 - 3S_1^2).$$

W prend donc une valeur finie quand U tend vers zéro.

1° Si $V_2^2 - 4U_4 > 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2$ est posi-



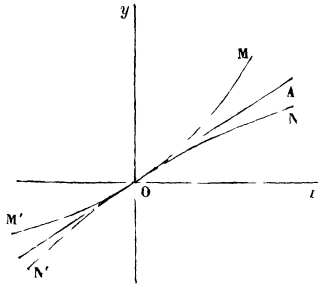
tive, et, par suite, les racines r_1 et r_2 sont réelles; la

formule (b_1) nous montre que les deux racines r_1 et r_2 sont du signe de U_4 . Si U_4 est positif, les deux racines sont de même signe quand le point directeur est de part et d'autre de la droite $U = 0$; la formule (a_1) nous donne alors le signe des deux racines.

On obtient, dans ce cas, une disposition analogue à celle de la *fig. 4*, et l'on saura, dans tous les cas, si les deux branches sont toutes deux au-dessus ou toutes deux au-dessous de la tangente.

Si U_4 est négatif, les deux racines sont de signes con-

Fig. 5.



traires, on obtient alors une disposition de la courbe comme celle de la *fig. 5*.

2° Si $V_2^2 - 4U_4 < 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$ est négative, les racines r_1 et r_2 sont imaginaires conjuguées; le point O est un point de rebroussement isolé.

3° Si $V_2^2 - 4U_4 = 0$ lorsqu'on substitue dans la fonction $V_2^2 - 4U_4$ les coordonnées d'un point de la tangente $U = 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2$ aura pour valeur

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = \frac{-2V_2S_1 + Q}{U} + iS_2 - 3S_1^2.$$

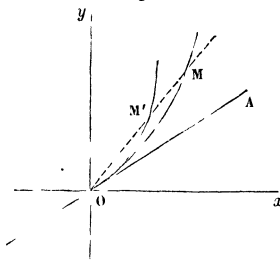
Q étant le quotient de $V_2^2 - 4U_4$ par U ; elle change de

signe avec U ; par suite, les racines $r_1 r_2$ seront réelles quand le point directeur est d'un côté de la droite $U = 0$, elles sont imaginaires de l'autre.

C'est le signe du terme $-\frac{2V_2 S_1 + Q}{U}$ qui indique de quel côté de la tangente se trouve la courbe.

$V_2^2 - 4U_4$ étant égal à zéro quand on y substitue les coordonnées d'un point de la tangente, $U_4 = \left(\frac{V_2}{2}\right)^2$; par suite, U_4 est toujours positif, et les racines r_1 et r_2 sont de même signe, pour des points suffisamment voisins de

Fig. 6.



la tangente. La figure affectée par la courbe est alors celle de la *fig.* 6.

Pour avoir le signe de $-2V_2 S_1 + Q$, il suffit de remarquer que S_1 est la somme

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \dots + \frac{1}{r_{m-2}}.$$

Cette somme varie peu dans le voisinage de la tangente, elle ne change pas de signe si S_1 ne s'annule pas au moment où le point directeur traverse la tangente; par suite, S_1 diffère peu de la somme des inverses des racines de l'équation

$$U_4 + U_5 r + \dots + U_m r^{m-4} = 0;$$

S_1 diffère donc aussi peu que l'on veut de $-\frac{U_5}{U_4}$.

Tous ces résultats sont indépendants du nombre des racines de l'équation en r qui, en même temps, pourraient devenir infinies; si cela arrive, un certain nombre de termes des sommes

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{m-1}},$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \dots + \frac{1}{r_{m-2} r_{m-1}}$$

disparaissent, et rien ne sera changé dans les raisonnements.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude détaillée des circonstances que présente la discussion de la courbe, lorsque plus de deux racines tendent vers zéro à la fois; nous nous contenterons d'indiquer en quelques mots la manière dont on pourra procéder, dans le cas plus complexe où trois racines tendent vers zéro.

6. Soient toujours r_1, r_2, \dots, r_{m-1} , les racines de l'équation en r qui sera de degré $m - 1$ dans le cas que nous allons étudier; soient r_1, r_2, r_3 les trois racines qui tendent vers zéro; supposons pour fixer les idées que l'équation en r soit

$$U_1 + r U_2 + r^2 U_3 + \dots + r^{m-1} U_m = 0,$$

et que l'on ait

$$U_2 = V_1 U_1, \quad U_3 = V_2 U_1.$$

On aura les relations

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots = -V_1,$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} + \dots = V_2,$$

$$\frac{1}{r_1 r_2 r_3} + \dots = -\frac{U_3}{U_1}.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} &= -(V_1 + S_1), \\ \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} &= V_2 + (V_1 + S_1)S_1 - S_2, \\ \frac{1}{r_1 r_2 r_3} + \dots &= -\frac{U_4}{U_1} - [V_2 + (V_1 + S_1)S_1 - S_2]S_1 - S_3; \end{aligned}$$

en appelant S_1 la somme des racines autres que r_1, r_2, r_3 , S_2 la somme de leurs produits deux à deux, et S_3 la somme de leurs produits trois à trois.

Nous formerons de même la fonction des racines

$$\Delta = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right)^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2.$$

Si $\Delta > 0$ les trois racines r_1, r_2, r_3 sont réelles comme l'on sait, et si $\Delta < 0$ une seule racine, r_1 est réelle. Il est aisé de voir que Δ est de la forme

$$\frac{-U_4^2 + U_1 W_1 + U_1^2 W_2}{U_1^2},$$

cette quantité est essentiellement négative pour de petites valeurs de U_1 ; par suite, une seule racine r_1 de l'équation est réelle, parmi celles qui tendent vers zéro; les deux autres sont imaginaires conjuguées, le produit $r_2 r_3$ est donc positif, et, par conséquent, le signe de la troisième racine est donné par le signe de $-\frac{U_4}{U_1}$. Cette racine change donc de signe avec U_1 . On obtient une seule branche de courbe analogue à celle de la *fig. 1*.

On discuterait aussi aisément les cas où :

1° U_2 est le carré d'une fonction linéaire U , U_1 étant identiquement nulle, et U_3 divisible par U , ainsi que U_4 ;

2° U_1 et U_2 étant identiquement nuls, U_3 est le cube d'une fonction linéaire U , et U_4 divisible par U , ainsi que U_5 .

Le cas où quatre racines de l'équation en r tendraient vers zéro est un peu plus complexe; on voit toutefois que le problème n'est autre que celui de chercher les conditions de réalité de deux ou quatre racines d'une équation du quatrième degré, et qu'on peut introduire, dans la solution, de notables simplifications en ne conservant dans les expressions que les termes qui influent réellement sur leurs signes.

7. Nous allons terminer cet exposé par une remarque importante.

Si, au lieu de considérer une équation de degré m qui représente une courbe ayant à l'origine un point simple ou double, on avait considéré une équation représentant une courbe ayant à l'origine un point multiple d'ordre p , la théorie eût été la même. Car soit

$$U_p(a, b) + rU_{p+1}(a, b) + \dots - r^{m-p}U_m(a, b) = 0,$$

l'équation en r qui convient à ce cas.

Le polynôme $U_p(x, y)$ est décomposable en p facteurs de la forme $\beta x - \alpha y$ réels ou imaginaires, simples ou multiples. Considérons un facteur simple de $U_p(x, y)$, il fournira dans $U_p(a, b)$ un facteur linéaire correspondant en a et b . Soient

$$U_p(x, y) = U(x, y)V_{p-1}(x, y)$$

et, pour abrégé,

$$U_p(a, b) = UV_{p-1}.$$

L'équation en r sera

$$UV_{p-1} + rU_{p+1} + \dots - r^{m-p}U_m = 0.$$

Si $U_{p+1}(x, y)$ n'est pas divisible par $U(x, y)$, le raisonnement que nous avons fait, dans le cas d'un point simple ordinaire à l'origine, nous montre que la droite

$U = 0$ du faisceau $U_p(x, y) = 0$ est tangente à une branche ordinaire de courbe, située tout entière d'un même côté de sa tangente. Toutes les racines simples de l'équation $U_p(x, y) = 0$ donnent lieu à la même discussion; si elles sont toutes simples, on pourra donc dire que le point multiple d'ordre p résulte de la superposition de p points simples.

Si le polynôme $U_p(x, y)$ admet un facteur double, l'équation en r prendra la forme

$$U^2 V_{p-2} + r U_{p+1} + \dots + r^{m-p} U_m = 0,$$

et la droite $U = 0$ sera une tangente de rebroussement; on construira les branches tangentes à la droite $U = 0$, comme nous l'avons fait, dans le cas où l'origine est un point double.

Il est inutile de pousser plus loin cette analyse, ce que nous avons dit précédemment suffit pour montrer comment on opérerait dans des cas plus complexes.

8. Dans ce qui précède, nous avons coupé la courbe par la droite

$$\begin{aligned} x &= ar, \\ y &= br, \end{aligned}$$

et nous avons étudié l'équation en r qui donne les rayons vecteurs menés de l'origine au point de rencontre de la droite et de la courbe. Cette méthode n'offre aucune difficulté pratique; mais on peut aussi, au lieu de cela, prendre l'équation de la transversale sous la forme

$$y = \lambda x,$$

et éliminer y entre cette équation et celle de la courbe; on obtient alors l'équation

$$U_1(1, \lambda) + x U_2(1, \lambda) + \dots + x^{m-1} U_m(1, \lambda) = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est donné par

$$U_1(r, \lambda) = 0,$$

et l'on opérera sur cette équation en x et λ , comme nous l'avons fait sur l'équation en r , a et b .

Ce seront les fonctions symétriques

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{m-1}},$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_{m-2} x_{m-1}},$$

qui nous permettront de faire la discussion et de construire la courbe dans chaque cas particulier.

9. Si le point à étudier n'est pas à l'origine, mais en un point (α, β) du plan, il faudra considérer l'équation $0 = F(\alpha, \beta) + x F'_\alpha + y F'_\beta + \frac{1}{2}(x^2 F''_{\alpha\alpha} + 2xy F''_{\alpha\beta} + y^2 F''_{\beta\beta}) + \dots$, et, comme $F(\alpha, \beta) = 0$ par hypothèse, l'équation précédente a la forme

$$U_1(x, y) + U_2(x, y) + \dots + U_m(x, y) = 0,$$

qui est de même forme que celle que nous avons discutée.

Nous allons passer maintenant au cas où le point considéré est à l'infini, c'est-à-dire étudier la courbe autour de ses asymptotes.