ED. DEWULF

Théorème de cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 297-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__297_1>

THÉORÈME DE CINÉMATIQUE;

PAR M. ED. DEWULF,
Lieutenant-Colonel du Génie.

Une figure se déplace dans son plan : soient a et b deux de ses points, non situés en ligne droite avec le centre instantané de rotation O_1, α et β les centres de *courbure des trajectoires de a et de b. Les droites ab, $\alpha\beta$ concourent sur une droite issue de O_1 et parallèle à la corde de l'arc déterminé par l'angle aO_1b sur le cercle des inflexions.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons nous appuyer sur un lemme que nous avons énoncé dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (mai 1881) :

Sur une droite issue du centre instantané de rotation O_1, les points décrivants a et les centres de courbure α de leurs trajectoires forment deux ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1.

En effet, les segments O_1a, $O_1\alpha$ sont liés par la relation

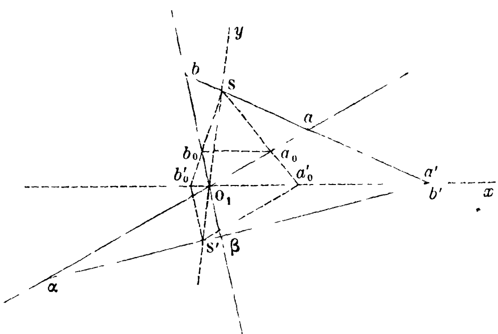
$$\frac{1}{O_1\alpha} - \frac{1}{O_1a} = \text{const.},$$

qui est l'expression la plus simple de deux ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 (Chasles, *Géométrie supérieure*, 2^e édition, n° 171).

Supposons maintenant que les ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O_1 soient déterminées, sur O_1a, par le point a_0 correspondant au point α_∞ de l'infini, et sur O_1b par b_0 correspondant à β_∞.

Pour construire le point α qui correspond à un point a, traçons, par le centre instantané O_1, deux axes rectangulaires, tels que O_1x soit parallèle à la droite a_0b_0, c'est-à-dire à la corde de l'arc déterminé par l'angle aO_1b sur le cercle des inflexions.

Soit S le point d'intersection de O_1y avec la droite ab; si nous projetons, du point S, les points décrivants $a, \ldots, a_0$ sur O_1x en $a', \ldots, a'_0$, la ponctuelle de O_1x sera perspective avec la ponctuelle formée sur O_1a par les centres de courbure $\alpha, \ldots, \alpha_\infty$, et les droites qui joignent les points correspondants de ces deux ponctuelles vont concourir en un point S' de $O_1 S$. Ce point S' est déterminé par la droite $a'_0 \alpha_\infty$, c'est-à-dire par la parallèle à $O_1 a$ menée par a_0. Si nous joignons ensuite le point S' au point a', l'intersection de cette droite avec $O_1 a$ nous donne le point α centre de courbure de la trajectoire du point a.



Nous déterminons, de la même manière, le centre de courbure β de la trajectoire du point b. Nous tirons $S b_0$ qui coupe $O_1 x$ en b'_0 et par b'_0 nous menons une parallèle à $O_1 b$ qui coupe $O_1 S$ au point S'.

En effet, le triangle formé par cette dernière droite, par $b'_0 a'_0$ et par $a'_0 S'$, a ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle $b_0 O_1 a_0$; ces deux triangles sont homologiques, et la parallèle à $O_1 b$ menée par b'_0 coupe $O_1 S$ en S'. Donc, le point β se trouve sur la droite $\alpha a'$, ce qui démontre notre théorème.

Corollaire. — Soient (a) et (b) deux courbes de la figure mobile; (e_a), (e_b) les enveloppes de ces courbes; α et β les centres de courbure de (a) et (b) en leurs points de contact avec leurs enveloppes.

On sait que les points a_0, b_0, définis comme plus haut, sont les projections sur $O_1 a$ et $O_1 b$ du centre instantané du second ordre O_2.

On sait aussi que le centre de courbure α_1 de (e_a) au point de contact avec l'enveloppée n'est autre que le centre de courbure de la trajectoire de α. Le centre de courbure β_1 de (e_b) est le rayon de courbure de la trajectoire de β.

D'après notre théorème, énoncé ci-dessus, la droite issue de O_1 et parallèle à $a_0 b_0$ et les droites $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$ concourent en un même point. Ainsi se trouve démontré le théorème de Cinématique, dû à M. Habich, et que ce géomètre a fait connaître récemment dans les *Nouvelles Annales* ([1]).

Observation. — Le théorème général que nous avons démontré est lui-même un cas particulier de celui-ci :

Une figure se déplace dans son plan. Soient O *le centre instantané de rotation, a et a' deux points quelconques fixes de la figure, b un point mobile sur* O*b et* β *le centre de courbure de la trajectoire du point b au moment considéré; le lieu géométrique de l'intersection des rayons ab, a'*β *est une conique passant par le centre instantané; si les points a et a' sont en ligne droite avec le centre* O, *ce lieu géométrique est une droite passant par* O; *enfin, si le point a' est le centre de courbure de la trajectoire du point a au moment considéré, le lieu géométrique est une droite passant par le centre instantané et parallèle à la corde qui sous-tend l'arc déterminé sur le cercle des inflexions par l'angle a*O*b.*

30 octobre 1882.

([1]) 3e série, t. I, p. 458.