G. FOURET

Sur quelques identités trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 262-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__262_1>

SUR QUELQUES IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. G. FOURET,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

En désignant par a, b, c trois angles quelconques, on a identiquement

$$(1)\cdot\left\{\begin{aligned}&\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}+\frac{\sin(a-b)}{\sin c}\\&\qquad+\frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a\sin b\sin c}=0.\end{aligned}\right.$$

Cette relation est déjà connue : elle est comprise dans l'énoncé de la question 681 (2e série, t. II, p. 523), comme s'appliquant aux trois angles d'un triangle rectiligne. La démonstration qui en a été donnée (2e série, t. III, p. 72) l'a étendue à trois angles quelconques. De cette identité nous allons déduire, par quelques transformations fort simples, d'autres identités qui nous ont paru, pour la plupart, nouvelles et dignes d'être notées.

Nous commencerons par donner de la relation (1) une démonstration plus élémentaire et plus simple que celle qui a été publiée dans ce Recueil, en nous servant uniquement de la formule qui sert à transformer une différence de cosinus en un produit de sinus, et réciproquement.

On a d'abord

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}\\
&=\frac{\sin b\sin(b-c)+\sin a\sin(c-a)}{\sin a\sin b}\\
&=\frac{\cos c-\cos(2b-c)+\cos(2a-c)-\cos c}{2\sin a\sin b}\\
&=\frac{\sin(a+b-c)\sin(b-a)}{\sin a\sin b};
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}+\frac{\sin(a-b)}{\sin c}\\
&=\frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b\sin c}[\sin a\sin b-\sin(a+b-c)\sin c]\\
&=\frac{\sin(a-b)}{2\sin a\sin b\sin c}[\cos(a-b)-\cos(a+b)\\
&\qquad\qquad -\cos(a+b-2c)+\cos(a+b)]\\
&=\frac{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}{\sin a\sin b\sin c}.
\end{aligned}$$

D'où l'on conclut la relation (1), en faisant passer tous les termes dans un même membre.

Pour abréger l'écriture, désignons d'une manière générale par $\sum \varphi(a, b, c)$ la somme des trois valeurs que prend une fonction trigonométrique $\varphi(a, b, c)$ des trois angles a, b, c, quand on les permute circulairement. Moyennant cette convention, la relation (1) peut s'écrire

$$(1)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\sin a} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a \sin b \sin c} = 0.$$

En appliquant la même relation aux trois angles $a+h$, $b+h$, $c+h$, h étant quelconque, on obtient

$$(2)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\sin(a+h)} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin(a+h)\sin(b+h)\sin(c+h)} = 0,$$

d'où, en faisant $h = \frac{\pi}{2}$,

$$(3)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\cos a} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\cos a \cos b \cos c} = 0.$$

Dans (1) et (3) remplaçons a, b, c respectivement par α, β, γ, et faisons ensuite $\alpha = b+c$, $\beta = c+a$, $\gamma = a+b$; il vient

$$(4)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin(b+c)\sin(c+a)\sin(a+b)} = 0,$$

$$(5)\quad \sum \frac{\sin(b-c)}{\cos(b+c)} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\cos(b+c)\cos(c+a)\cos(a+b)} = 0.$$

En différentiant (2) par rapport à h, on obtient, toute réduction faite,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{\cos(a+h)\sin^2(b+h)\sin^2(c+h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} \\ &= \cos(a+h)\cos(b+h)\cos(c+h) - \cos(a+b+c+3h). \end{aligned} \right.$$

Cette relation a lieu quel que soit h. En y faisant successivement $h = 0$ et $h = \frac{\pi}{2}$, on en conclut les deux suivantes :

$$(7)\quad \sum \frac{\cos a \sin^2 b \sin^2 c}{\sin(a-b)\sin(a-c)} = \cos a \cos b \cos c - \cos(a+b+c),$$

$$(8)\quad \sum \frac{\sin a \cos^2 b \cos^2 c}{\sin(a-b)\sin(a-c)} = \sin a \sin b \sin c + \sin(a+b+c).$$

En différentiant par rapport à h la relation (6), on obtiendrait une nouvelle identité, que l'on pourrait particulariser en faisant $h=0$ et $h=\frac{\pi}{2}$. Mais les résultats auxquels on arrive ainsi ne sont pas assez simples pour mériter d'être énoncés.

Des relations (1) et (3) nous pouvons encore déduire une relation fort simple et d'ailleurs connue, en les ajoutant membre à membre, après avoir chassé les dénominateurs. On obtient ainsi

$$\sum \sin(b-c)\cos(b-c) + 2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b) = 0,$$

ce qui peut s'écrire, α, β, γ désignant trois angles dont la somme est nulle,

$$(9)\qquad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 0.$$

Cette dernière relation n'est qu'un cas particulier d'une autre beaucoup plus générale, dont nous aurons peut-être l'occasion de nous occuper dans une prochaine Note.