MAURICE D'OCAGNE

Sur un algorithme algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 220-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__220_0>

SUR UN ALGORITHME ALGÉBRIQUE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Représentons le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynôme $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$, où l'on remplace tous les coefficients par l'unité, à l'aide de la notation

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}.$$

Cet algorithme jouit des propriétés suivantes (¹) :

$$(1) \quad [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m)} + a_p [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-1)},$$

$$(2) \quad \begin{cases} [a_2 a_3 \ldots a_{p+1}]^{(m)} - [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} \\ \quad = (a_{p+1} - a_1)(a_1 a_2 \ldots a_{p+1}]^{(m-1)}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m)} \\ \quad + a_p [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m-1)} + a_p^2 [a_1 \ldots a_{p-1}]^{(m-2)} + \ldots + a_p^m. \end{cases}$$

Dans le cas où

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad \ldots, \quad a_p = p,$$

nous poserons

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [1_p]^{(m)}.$$

Nous pourrons facilement calculer, par voie récurrente, les quantités $[1_p]^{(m)}$.

(¹) Ma Note, rédigée il y a un an, à l'École Polytechnique, avait primitivement pour but l'étude de cet algorithme dont je croyais l'idée nouvelle et dont j'avais trouvé quelques propriétés. Mais M. Brisse, m'ayant appris que cet algorithme avait déjà été étudié par Wronski qui le nommait fonction *aleph* et en avait fait un fréquent usage, je me borne à énoncer celles des propriétés dont j'aurai besoin pour la présente application, extraite de mon travail primitif, et qui, je crois, est nouvelle. Ma notation est d'ailleurs, au signe *aleph* près, celle de Wronski.

En effet, la formule (1) donne, dans ce cas,

$$[1_p]^{(m)} = [1_{p-1}]^{(m)} + p[1_p]^{(m-1)},$$

et l'on a les conditions initiales

$$[1_1]^{(m)} = 1, \quad [1_p]^{(1)} = \frac{p(p+1)}{2}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{array}{lllll}
[1_1]^{(1)} = 1, & [1_2]^{(1)} = 3, & [1_3]^{(1)} = 6, & [1_4]^{(1)} = 10, & \ldots, \\
[1_1]^{(2)} = 1, & [1_2]^{(2)} = 7, & [1_3]^{(2)} = 25, & [1_4]^{(2)} = 65, & \ldots, \\
[1_1]^{(3)} = 1, & [1_2]^{(3)} = 15, & [1_3]^{(3)} = 90, & [1_4]^{(3)} = 350, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots.
\end{array}$$

Ces nombres sont identiques à certains coefficients envisagés par M. Schlömilch dans un Mémoire sur les *facultés analytiques*. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

α étant un nombre entier, faisons maintenant

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \alpha + 1, \quad \ldots, \quad a_p = \alpha + p - 1,$$

et posons

$$[\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)]^{(m)} = [\alpha_p]^{(m)}.$$

Pour calculer les nombres $[\alpha_p]^{(m)}$ à l'aide des nombres $[1_p]^{(m)}$, appliquons la formule (2); elle donne

$$\begin{aligned}
[2_p]^{(m)} &= [1_p]^{(m)} + p[1_{p+1}]^{(m-1)}, \\
[3_p]^{(m)} &= [2_p]^{(m)} + p[2_{p+1}]^{(m-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[\alpha_p]^{(m)} &= [(\alpha-1)_p]^{(m)} + p[(\alpha-1)_{p+1}]^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

On déduit de là que

$$\begin{aligned}
[\alpha_p]^{(m)} = [1_p]^{(m)} &+ \frac{\alpha-1}{1} p[1_{p+1}]^{(m-1)} \\
&+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2} p(p+1)[1_{p+2}]^{(m-2)} + \ldots \\
&+ p(p+1)\ldots(p+\alpha-2)[1_{p+\alpha-1}]^{(m-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Mais on peut aussi calculer directement, par voie récurrente, les nombres $[\alpha_p]^{(m)}$. La formule (1) donne, en effet, pour ces nombres,

$$[\alpha_p]^{(m)} = [\alpha_{p-1}]^{(m)} + (\alpha + p - 1)[\alpha_p]^{(m-1)},$$

et l'on a les conditions initiales

$$[\alpha_1]^{(m)} = \alpha^m,$$

$$[\alpha_p]^{(1)} = \alpha + (\alpha + 1) + \ldots + [\alpha + (p - 1)] = \frac{p(2\alpha + p - 1)}{2}.$$

Tous les nombres qui viennent d'être définis jouent un rôle dans la théorie des facultés analytiques. Je vais, en effet, démontrer que

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(z - \alpha)[z - (\alpha + 1)]\ldots[z - (\alpha + p - 1)]} \\ & \quad = \frac{1}{z^p} + \frac{[\alpha_p]^{(1)}}{z^{p+1}} + \frac{[\alpha_p]^{(2)}}{z^{p+2}} + \ldots + \frac{[\alpha_p]^{(m)}}{z^{p+m}} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

la valeur de z étant, bien entendu, supposée choisie de façon à rendre la série convergente. On a

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{[\alpha_p]^{(m+1)}}{[\alpha_p]^{(m)}} \frac{1}{z}.$$

Mais

$$\frac{[\alpha_p]^{(m+1)}}{[\alpha_p]^{(m)}} < \alpha + \ldots + (\alpha + p - 1).$$

La série sera donc convergente pour

$$z > \alpha + \ldots + (\alpha + p - 1).$$

La formule se vérifiant immédiatement pour $p = 1$, faisons voir que si elle a lieu pour la valeur $p - 1$, elle est encore vraie pour la valeur p.

Supposons alors que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(z - \alpha)\ldots[z - (\alpha + p - 2)]} \\ & \quad = \frac{1}{z^{p-1}} + \frac{[\alpha_{p-1}]^{(1)}}{z^p} + \frac{[\alpha_{p-1}]^{(2)}}{z^{p+1}} + \ldots + \frac{[\alpha_{p-1}]^{(m)}}{z^{p+m-1}} + \ldots. \end{aligned}$$

Cette série est évidemment convergente pour toute valeur de z qui rend la précédente convergente; pour cette valeur de z, on a également

$$\frac{1}{z-(\alpha+p-1)} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha+p-1}{z^2} + \frac{(\alpha+p-1)^2}{z^3} + \ldots + \frac{(\alpha+p-1)^m}{z^{m+1}} + \ldots.$$

Faisons le produit de ces deux développements; le coefficient du terme en $\frac{1}{z^{m+p}}$ est

$$[\alpha_{p-1}]^{(m)} + (\alpha+p-1)[\alpha_{p-1}]^{(m-1)} + (\alpha+p-1)^2[\alpha_{p-1}]^{(m-2)} + \ldots + (\alpha+p-1)^m,$$

ou, d'après la formule (3),

$$[\alpha_p]^{(m)}.$$

La proposition est par suite établie.

Dans le cas particulier où $\alpha = 1$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)\ldots(z-p)} = \frac{1}{z^p} + \frac{[1_p]^{(1)}}{z^{p+1}} + \frac{[1_p]^{(2)}}{z^{p+2}} + \ldots + \frac{[1_p]^{(m)}}{z^{p+m}} + \ldots.$$

C'est ce développement que M. Schlömilch envisage, dans son Mémoire *Sur les coefficients des facultés analytiques* (¹). Il désigne le coefficient du terme en $\frac{1}{z^{m+p}}$ par $\overset{-p}{C}_m$, et en donne l'expression

$$\overset{-p}{C}_m = \frac{p^{p+m} - \frac{p}{1}(p-1)^{p+m} + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^{p+m} - \ldots + (-1)^{p-2}\frac{p(p-1)}{1.2}(2)^{p+m} + (-1)^{p-1}\frac{p}{1}}{1.2.3\ldots p}.$$

Mais, d'après la formule précédente, on a

$$\overset{-p}{C}_m = [1_p]^{(m)};$$

(¹) *Journal de Crelle*, t. 44, p. 344.

la comparaison de ces deux expressions fournit un théorème.

Il est facile d'avoir la fonction génératrice du nombre $[\alpha_p]^{(m)}$. Multipliant les deux membres de la formule (4) par z^p et posant $\frac{1}{z} = x$, nous avons

$$\frac{1}{(1-\alpha x)[1-(\alpha+1)x]\ldots[1-(\alpha+p-1)x]}$$
$$= 1 + [\alpha_p]^{(1)}x + \ldots + [\alpha_p]^{(m)}x^m + \ldots.$$

La fonction génératrice est donc

$$\frac{1}{(1-\alpha x)[1-(\alpha+1)x]\ldots[1-(\alpha+p-1)x]},$$

et l'on a

$$[\alpha_p]^{(m)} = \frac{1}{1.2\ldots m}$$
$$\times\left[D^m \frac{1}{(1-\alpha x)[1-(\alpha+1)x]\ldots[1-(\alpha+p-1)x]}\right]_{x=0}.$$

Tous ces résultats relatifs aux facultés analytiques se généralisent facilement, la démonstration étant identique.

Soit

$$f(z) = z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_{p-1}z + A_p = 0$$

une équation ayant toutes ses racines $a_1, a_2, \ldots, a_p$ réelles. On a

$$(5)\quad \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^p} + \frac{[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(1)}}{z^{p+1}} + \ldots + \frac{[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}}{z^{p+m}} + \ldots$$

et cette série est convergente pour $z > a_1 + a_2 + \ldots + a_p$.

Multipliant les deux membres par z^p, posant

$$z = \frac{1}{x}$$

et

$$\varphi(x) = 1 + A_1 x + \ldots + A_{p-1}x^{p-1} + A_p x^p,$$

on a

$$(6)\quad \frac{1}{\varphi(x)} = 1 + [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(1)}x + \ldots + [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}x^m + \ldots.$$

La fonction génératrice de $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$ est donc $\frac{1}{\varphi(x)}$, et l'on a ([1])

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = \frac{1}{1.2\ldots m}\left[D^m \frac{1}{\varphi(x)}\right]_{x=0}.$$

Mais la formule (5) va nous conduire à un résultat plus intéressant.

En effet, si, d'une manière générale, nous désignons par a une racine de l'équation

$$f(z) = 0,$$

nous avons

$$\frac{1}{f(z)} = \sum \frac{1}{f'(a)(z-a)},$$

ou, en supposant toujours prise pour z une valeur qui rende le développement de $\frac{1}{f(z)}$ convergent,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z}\sum \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{z^2}\sum \frac{a}{f'(a)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{z^p}\sum \frac{a^{p-1}}{f'(a)} + \ldots + \frac{1}{z^{p+m}}\sum \frac{a^{p-1+m}}{f'(a)} + \ldots.$$

Identifiant cette formule avec la formule (5), nous voyons que

$$\sum \frac{a^k}{f'(a)} = 0 \quad \text{pour } k < p - 2,$$

que

$$\sum \frac{a^{p-1}}{f'(a)} = 1;$$

([1]) M. Brisse, en me signalant la théorie des fonctions *aleph* de Wronski, m'a indiqué, dans le *Journal de M. Resal,* t. VII, p. 1, un article de M. West que je ne connaissais point et que j'aurais pu utilement consulter; j'ai trouvé, dans cet article, une formule qui est, à très peu près, la même que la formule (6) et qui est attribuée à M. Hanegraeff. Je tiens à mentionner ce fait, qui n'est venu à ma connaissance que longtemps après la rédaction de mon travail.

enfin, d'une manière générale, que

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = \sum \frac{a^{p-1+m}}{f'(a)},$$

formule remarquable, puisqu'elle permet très aisément d'obtenir la valeur de $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$, quand on a formé le polynôme $f(z)$ qui, égalé à zéro, admet pour racines les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\sum \frac{a^n}{f'(a)} = [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(n-p+1)},$$

n étant supposé $\leq p$.