

J. CARON

Note sur la ponctuation

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 161-166

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__161_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA PONCTUATION;

PAR M. J. CARON,

Directeur des travaux graphiques à l'École Normale supérieure.

On se propose de représenter un système composé d'un certain nombre de surfaces P, Q, R, S, \dots et d'établir la ponctuation en projection horizontale par exemple, ces surfaces étant d'ailleurs opaques et prolongées indéfiniment.

Considérons une verticale quelconque, et représentons par p, q, r, s, \dots les points de rencontre de cette verticale avec les surfaces correspondantes. Nous supposons ces points nommés dans l'ordre où ils se présentent, le point p étant le plus élevé. D'après les conventions admises, c'est-à-dire en supposant l'observateur placé à l'infini au-dessus du plan horizontal, le point p est le seul vu en projection horizontale, et il cache tous les autres q, r, s, \dots .

Voyons ce qui se passe, lorsque la verticale variable se meut de manière à avoir son pied successivement dans toutes les régions du plan horizontal.

Nous entendons par région du plan horizontal tout contour formé par les projections horizontales des intersections des surfaces données prises deux à deux, et par les contours apparents horizontaux en projection de ces surfaces.

Soit (p, q) la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces P et Q : nous remarquerons qu'en faisant traverser uniquement la limite (p, q) par le pied de la verticale, il se produit une inversion dans l'ordre

des points p et q sur la verticale variable, c'est-à-dire qu'au lieu de lire sur la verticale primitive les points dans l'ordre p, q, r, s, \dots , on les lira sur la nouvelle verticale dans l'ordre q, p, r, s, \dots .

Plus généralement, en traversant uniquement une limite (m, n) , il se produit dans l'ordre des lettres une inversion des mêmes lettres m et n , autrement dit, on passera de la disposition $pqr \dots mn \dots xy$ à la disposition $pqr \dots nm \dots xy$.

Nous remarquerons également qu'en traversant uniquement le contour (m, n) , il ne doit exister, dans l'ordre des lettres sur la verticale, aucune lettre entre m et n avant ou après le passage sur la limite considérée; c'est-à-dire qu'il ne se produit jamais d'inversion qu'entre deux lettres successives.

Enfin, en supposant que les deux lettres p et q entre lesquelles se produit l'inversion soient placées les premières, c'est que la limite (p, q) , intersection des deux surfaces P et Q, est vue en projection horizontale, car, d'un côté de cette ligne, on voit la surface P, et de l'autre la surface Q. Autrement, la limite (p, q) est cachée.

Dans la série des points p, q, r, s, \dots , on peut en avoir appartenant à une même surface; représentons-les par la même lettre affectée d'un indice, $p, q, p_1, p_2, r, s, q_1, \dots$. Si le pied de la verticale traverse le contour apparent de la surface P, les deux points p_1, p_2 disparaissent en même temps, et il nous reste les points p, q, r, s, q_1, \dots .

A l'aide de ces considérations, nous allons démontrer deux théorèmes dont l'emploi permet d'effectuer assez rapidement une ponctuation.

THÉORÈME P. — *Si un point M commun à trois surfaces*

P, Q, R est vu, en représentant un système de surfaces opaques P, Q, R, S, \dots , il existe trois lignes passant par le point M et formant six rayons alternativement vus et cachés, en supposant toutefois qu'il n'existe pas de plan tangent commun en M , ni que le point M appartienne à un contour apparent.

Les trois lignes passant par le point M sont évidemment les intersections des surfaces P, Q, R prises deux à deux, et de plus il n'y aura pas d'autres limites passant par le point M , que ces trois courbes $(p, q), (q, r), (r, p)$. Cependant, il peut exister, dans le voisinage du point M , d'autres limites correspondant aux mêmes régions de surfaces, mais on peut toujours tracer une circonférence C , ayant pour centre le point M et n'atteignant aucune de ces limites. Enfin, nous négligeons les limites passant accidentellement par le point M en projection, parce qu'elles ne correspondent pas à des limites passant par le point M de l'espace, ce dernier point étant supposé vu. Ces nouvelles limites ne jouent alors aucun rôle, et l'on peut raisonner comme si l'on ne représentait que les régions de surfaces P, Q, R voisines du point M .

Faisons marcher le pied de la verticale sur la circonférence C , en partant d'un point quelconque a de cette circonférence, et en tournant dans un sens déterminé. Dans ce mouvement, nous allons rencontrer successivement les six rayons formés par les limites $(p, q), (q, r), (r, p)$, et, par suite, nous établirons leur ponctuation.

Soit p, q, r l'ordre des points sur la verticale a ; en marchant sur la circonférence, nous rencontrons l'un quelconque des rayons en un point α que nous pouvons toujours supposer vu; autrement dit, nous supposons le rayon $M\alpha$ vu.

En traversant la limite $M\alpha$ au point α , il se produira

une inversion entre deux lettres successives p, q ou q, r ; de plus, le point α étant vu, l'inversion ne peut se produire qu'entre les deux premières lettres p et q . On passe donc de la disposition p, q, r à la disposition q, p, r , après avoir traversé le rayon $M\alpha$, qui d'ailleurs ne sera autre chose que l'intersection des deux surfaces P et Q .

Continuons de marcher sur la circonférence C , nous atteignons un nouveau rayon $M\beta$ qui, assurément, ne sera pas la limite (p, q) , puisque le point M est supposé simple. En traversant ce nouveau rayon $M\beta$ au point β , il se produira une inversion qui, d'après ce que nous venons de dire, ne peut plus avoir lieu entre p et q . L'inversion possible a donc lieu entre p et r , et nous passons de la disposition q, p, r à la disposition q, r, p .

Cette nouvelle inversion n'ayant plus lieu entre les deux premières lettres, la limite traversée $M\beta$ est cachée.

En continuant de tourner, nous traversons le rayon $M\gamma$; la dernière disposition des points était q, r, p , et il ne peut plus se produire d'inversion entre les lettres p, r ; on passe donc à l'ordre r, q, p , ce qui prouve que le nouveau rayon $M\gamma$ est vu.

On a donc bien rencontré successivement un rayon vu et un rayon caché et, par suite, le théorème est démontré.

Cette discussion peut se résumer dans le Tableau suivant, dans lequel nous avons donné le signe $+$ aux rayons vus, et le signe $-$ aux rayons cachés.

		Marche de la verticale.												
		$a.$	$\alpha.$	$b.$	$\beta.$	$c.$	$\gamma.$	$a_1.$	$\alpha_1.$	$b_1.$	$\beta_1.$	$c_1.$	$\gamma_1.$	$a.$
Ordre des points sur la verticale.	{	p	pq	q	q	q	qr	r	r	r	rp	p	p	p
	{	q		p		r		q		p		r		q
	{	r	r	r	pr	p	p	p	qp	q	q	q	rq	r
Ponctuation du rayon.			$+(pq)$		$-(pr)$		$+(qr)$		$-(pq)$		$+(rp)$		$-(rq)$	

Citons, comme application de ce théorème, la représentation d'un système de plans opaques et prolongés indéfiniment.

Après avoir déterminé les intersections de tous les plans deux à deux, on coupera tous ces plans par un même plan vertical, ce qui donnera un système de droites. Parmi tous les points de rencontre de ces différentes droites, on peut toujours en choisir un m placé au-dessus de toutes les droites; ce point est donc vu en projection horizontale. La limite passant par le point m sera vue aussi en projection horizontale, dans le voisinage du point m , jusqu'au premier point commun à trois plans. En ce point commun, on aura l'occasion d'appliquer le théorème, ce qui donnera deux nouveaux rayons vus, et l'on continuera par cheminement, jusqu'au moment où l'on ne rencontrera plus de points communs; tout le reste sera caché.

THÉORÈME II. — Lorsqu'une courbe d'intersection de deux surfaces traverse le contour apparent dans l'espace de l'une des deux surfaces, en un point vu, la région vue de cette courbe fait suite à un contour apparent vu, en représentant le système des deux surfaces opaques.

Soient C le contour apparent en projection de la surface Q , et I la projection de l'intersection des deux surfaces P et Q . Par hypothèse, les deux courbes I et C sont tangentes en projection au point vu M , la courbe de l'espace I n'étant pas tangente au contour apparent de l'espace C . Nous supposons également que la courbe I ne présente ni point double, ni point de rebroussement en M .

De même que dans le théorème précédent, nous pouvons ne nous occuper que des régions des surfaces P

et Q voisines du point M . Traçons alors une circonférence A ayant son centre au point M , et dont le rayon sera choisi assez petit pour que cette circonférence n'atteigne aucune limite voisine du point M autre que I et C .

Faisons marcher le pied de la verticale sur la circonférence A , en partant d'un point a extérieur au contour apparent C . Cette verticale a coupera seulement la surface P en un point p . La verticale se déplaçant, elle coupera d'abord le contour apparent C en un point c , puis la courbe I au point i . Comme le point M sert de limite entre les parties vues et cachées de la courbe I , on peut toujours supposer que le point i est un point vu; nous allons en déduire la ponctuation du point c .

Or, en passant par le point c , la verticale coupe les deux surfaces aux points p et q placés dans l'ordre p, q ou dans l'ordre q, p , puis au delà du point c , le point q se dédouble, et nous avons les dispositions suivantes p, q_1, q_2 ou q_1, q_2, p

En arrivant au point i , il se produit une inversion entre les lettres p et q , abstraction faite des indices; comme le point i est supposé vu, il faut que les deux lettres sur lesquelles se produit l'inversion soient placées les premières : donc la première disposition p, q_1, q_2 est la seule possible. Si nous revenons au point c , l'ordre des points était donc p, q . et non q, p , ce qui veut dire que le point c du contour apparent de la surface Q est caché.

La seconde partie du contour apparent de la surface Q est alors vue : donc elle fait suite, comme nous l'avions dit, à une région vue Mi de l'intersection. En résumé. dans le voisinage du point de contact, les régions vues de l'intersection et du contour apparent ne présentent jamais l'aspect d'un point de rebroussement.