H. LAURENT

Mémoire sur la théorie de l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 145-160
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__145_0>

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

1. Dans ce Mémoire, je me propose de faire connaître une méthode nouvelle pour l'élimination de plusieurs inconnues entre plusieurs équations algébriques en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues; le travail auquel je me suis livré jettera, j'espère, quelque lumière sur la théorie de l'élimination.

J'admettrai dans ce qui va suivre le théorème de Bézout sur l'équation finale, ainsi que ses conclusions relativement au nombre des solutions de plusieurs équations à plusieurs inconnues, lorsqu'il n'existe aucune relation particulière entre les coefficients de ces équations.

2. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des polynômes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_n$; je dirai que, les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant *diviseurs*, les polynômes F et f sont *équivalents*, lorsqu'il existera des polynômes entiers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + f.$$

Un polynôme f sera dit *réduit* par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, quand il ne contiendra pas de termes divisibles par $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$. *Réduire* un polynôme F, ce sera trouver son équivalent f réduit.

Remarque. — Les définitions que nous venons de donner dépendent de l'ordre dans lequel on range les polynômes diviseurs φ et les variables x, mais cette distinction disparaît quand on suppose $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$, et alors nos théorèmes gagnent en élégance et en symétrie.

THÉORÈME. — *Le nombre des termes d'un polynôme réduit par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est* Πm.

En effet,

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \ldots + x_1^{m_1-1}) \\ \times (1 + x_2 + \ldots + x_2^{m_2-1}) \ldots (1 + x_n + \ldots + x_n^{m_n-1})$$

est un polynôme réduit dont tous les coefficients sont égaux à un; le nombre de ses termes s'obtiendra en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, ce qui donne Πm : c'est le nombre des termes d'un polynôme réduit quelconque.

3. Dans ce qui va suivre, les termes des polynômes que nous aurons à considérer seront de la forme $A x_1^i x_2^j \ldots x_n^k$: A sera ce que nous appellerons le *coefficient* du terme, et $x_1^i x_2^j \ldots x_n^k$ sera son *argument*, nous conformant en cela à un usage adopté déjà par un certain nombre de géomètres.

Soient

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

les solutions des équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0;$$

soit

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

le déterminant fonctionnel de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; *soit de plus*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{11}^{m_1-1} & \alpha_{12}^{m_2-1} & \ldots & \alpha_{1n}^{m_n-1} \\ 1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{21}^{m_1-1} & \alpha_{22}^{m_2-1} & \ldots & \alpha_{2n}^{m_n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

dans ce déterminant Δ la $i^{\text{ème}}$ ligne a pour éléments les arguments d'un polynôme réduit en $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$); *on aura*

$$\Delta^2 = \mathrm{G}\,\Pi\,\mathrm{D}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}), \tag{3}$$

G *désignant une quantité indépendante de z, en appelant z une variable entrant dans les coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, de manière à les rendre homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et z leurs degrés restants $m_1, m_2, \ldots, m_n$.*

En d'autres termes, G ne dépend que des coefficients $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, qui multiplient des arguments de degré m_1 dans φ_1, de degré m_2 dans φ_2, etc.

En effet, Δ changeant de signe quand on échange deux de ses lignes, Δ^2 sera une fonction symétrique des solutions de (2), ce sera une fonction entière de la variable z. Le second membre de (3) est aussi une fonction entière de z; or ce second membre s'annule dès que l'on suppose que les équations (2) ont une solution double, tout comme le premier membre Δ^2; mais le second membre ne s'annule que dans cette circonstance; tout ce que l'on peut affirmer dès à présent, c'est que (2) a lieu pour une certaine valeur de G qui est un polynôme entier en z. Si nous prouvons que les deux membres de (3) sont de mêmes degrés en z, il sera établi que G est indépendant de z.

Or soit δ_ν le nombre des termes de degré ν dans un polynôme réduit; le degré de Δ par rapport aux α et par suite par rapport à z sera $\Sigma\nu\delta_\nu$; or δ_ν est le coefficient de t^ν dans

$$\begin{aligned}\mathrm{T} = (1 + t + t^2 + \ldots + t^{m_1-1}) \\ \times (1 + t + \ldots + t^{m_2-1}) \ldots (1 + t + \ldots + t^{m_n-1}),\end{aligned}$$

δ_ν est le coefficient de $t^{\nu-1}$ dans $\dfrac{d\mathrm{T}}{dt}$; enfin $\Sigma\nu\delta_\nu$ est la valeur de $\frac{dT}{dt}$ pour $t = 1$; cette valeur est

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2} m_2 m_3 \ldots m_n + \frac{m_2(m_2-1)}{2} m_1 m_3 \ldots m_n + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \Pi m (\Sigma m - n);$$

le degré de Δ^2 est donc $\Pi m (\Sigma m - n)$. Or le degré de ΠD est le degré de D multiplié par Πm, c'est-à-dire précisément $\Pi m (\Sigma m - n)$: Δ^2 et ΠD sont donc de même degré et l'on a

$$\Delta^2 = G \Pi D,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Les polynômes réduits jouissent de propriétés remarquables qui les rapprochent des polynômes à une eule variable ; ainsi :

On peut déterminer sans ambiguïté un polynôme réduit, lorsqu'on connaît les valeurs qu'il prend quand $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *s'annulent à la fois.*

Soit en effet F_i la valeur que doit prendre un polynôme réduit f quand on suppose

$$x_1 = \alpha_{i1}, \quad x_2 = \alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_{in}.$$

En posant

$$f = g_0 + g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_{m_1-1, m_2-1, \ldots} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots,$$

$g_0, g_1, \ldots$ désignant des coefficients numériques, on devra avoir

$$\begin{aligned} F_1 &= g_0 + g_1 \alpha_{11} + g_2 \alpha_{12} + \ldots, \\ F_2 &= g_0 + g_1 \alpha_{21} + g_2 \alpha_{22} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

ces équations déterminent $g_0, g_1, \ldots$ et, par suite, f sans ambiguïté, si le déterminant que nous avons appelé Δ n'est pas nul, ce qui ne peut avoir lieu que si les équations (2) ont une solution multiple; nous ferons abstraction de ce cas singulier, ainsi que du cas où ces équations auraient des solutions infinies ou indéterminées. En d'autres termes, les solutions de (2) seront toujours supposées finies et distinctes; elles sont, comme l'on sait, au nombre de $m_1 m_2 \ldots = \Pi m$.

On voit donc que, abstraction faite du cas où les équations (2) n'auraient pas Πm solutions finies, déterminées et distinctes, un polynôme réduit sera bien déterminé par les valeurs qu'il prend quand les diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ s'annulent à la fois. C. Q. F. D.

Il résulte de là que : *il existe toujours un, et un seul polynôme réduit, équivalent à un polynôme donné.*

[Bien entendu en supposant toujours les solutions de (2) distinctes, bien déterminées et finies.]

En effet, si f est l'équivalent réduit d'un polynôme F, on aura

$$F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + f,$$

et en annulant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, on voit que f sera égal à F; f est donc déterminé par toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annulant les φ, en vertu du théorème précédent; il aura donc une valeur unique et bien déterminée.

Pour calculer le polynôme réduit équivalent à F, on n'a pas besoin de connaître les solutions des équations (2) : c'est ce que nous allons établir.

Soient

$$\varphi_1 = \Sigma a_1 x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \quad \varphi_2 = \Sigma a_2 x_1^i \ldots x_n^k, \quad \ldots$$

les identités qui définissent les fonctions φ; multiplions la première par tous les arguments d'un polynôme de degré $p - m_1$, la seconde par tous les arguments d'un polynôme de degré $p - m_2$, et ainsi de suite, on obtiendra

$$N(p - m_1) + N(p - m_2) + \ldots + N(p - m_n)$$

équations, $N(k)$ désignant en général le nombre des termes d'un polynôme complet de degré k à n variables. Je dis que ces équations sont en nombre suffisant pour déterminer tous les arguments non réduits de degré au moins égal à p en fonction des arguments réduits. Cherchons en effet le nombre de ces arguments non réduits ; considérons en particulier l'un d'eux divisible par $x_i^{m_i}$; si l'on y supprime le facteur $x_i^{m_i}$, il se réduit à un argument de degré $p - m_i$ ou de degré inférieur. Prenons donc tous les arguments de degrés $p - m_1$, $p - m_2$, ... ou de degrés inférieurs. Multiplions-les par $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2}$, ..., nous obtiendrons tous les arguments cherchés au moins une fois : le nombre des arguments cherchés est donc au plus

$$N(p - m_1) + N(p - m_2) + \ldots + N(p - m_n),$$

qui est celui des équations dont on dispose pour les calculer ; quand on aura calculé tous les arguments non réduits qui entrent dans un polynôme F donné, on pourra le mettre sous la forme $F = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + f$, et f sera son expression réduite. Rien n'empêche d'ailleurs, puisque l'on sait que le polynôme réduit f existe, de le déterminer par la méthode des coefficients indéterminés.

3. *Il existe une infinité de polynômes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *donnant lieu à l'identité*

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

Si en effet, par exemple, on fait

$$\lambda_1 = a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + \ldots + a_{1n} \varphi_n,$$
$$\lambda_2 = a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + \ldots + a_{2n} \varphi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{ii} = 0, \quad a_{ik} = - a_{ki},$$

l'identité en question aura lieu, quels que soient d'ailleurs les quantités a_{ij}.

Il résulte de là que, s'il n'existe qu'un seul polynôme f réduit équivalent à un polynôme F, il existera une infinité de polynômes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, donnant lieu à l'identité

$$F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + f.$$

Aussi, quand on cherche à rendre cette formule identique par la méthode des coefficients indéterminés, ne faut-il pas s'étonner d'être en face d'un problème indéterminé.

On remarquera l'analogie du problème que nous venons de résoudre avec celui qui a pour but de trouver le quotient et le reste de deux polynômes entiers par rapport à une seule variable.

Supposons par exemple $\varphi_1 = x_1 - \alpha_1$, $\varphi_2 = x_2 - \alpha_2, \ldots$, $\varphi_n = x_n - \alpha_n$, l'équivalent réduit d'un polynôme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera indépendant de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et égal à $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; il y aura d'ailleurs une infinité de polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tels que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_1(x_1 - \alpha_1) + P_2(x_2 - \alpha_2) + \ldots \\ + P_n(x_n - \alpha_n) + F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

On pourra prendre, par exemple,

$$P_1 = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - \alpha_1},$$

$$P_2 = \frac{F(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, x_n)}{x_2 - \alpha_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_n = \frac{F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{x_n - \alpha_n}.$$

Cette dernière remarque sera utilisée dans ce qui va suivre.

6. Dans la suite, nous aurons besoin de savoir résoudre le problème suivant :

Trouver un polynôme réduit nul pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *égales aux termes d'une solution des équations* (2), *excepté pour* $x_1 = \alpha_{i1}$, $x_2 = \alpha_{i2}, \ldots,$ $x_n = \alpha_{in}$.

Le polynôme obtenu en remplaçant, dans Δ, α_{i1} par x_1, α_{i2} par $x_2, \ldots$, est une solution de la question, mais on peut en trouver une autre plus utile. D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, on peut, et cela d'une infinité de manières, déterminer des polynômes P_{ij}, tels que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \\
&\quad = P_{11}(x_1 - \alpha_{i1}) + \ldots + P_{1n}(x_n - \alpha_{in}), \\
&\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \\
&\quad = P_{21}(x_1 - \alpha_{i1}) + \ldots + P_{2n}(x_n - \alpha_{in}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Posons alors

$$V = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix};$$

ce polynôme V s'annulera pour $x_1 = \alpha_{j1}$, $x_2 = \alpha_{j2}, \ldots,$ quel que soit j, excepté pour $i = j$; car, pour $i = j$, il se réduira à $D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, qui est différent de o par hypothèse. Pour le prouver, il suffit d'observer que, d'après la définition même des polynômes P_{ij}, pour

$$x_1 = \alpha_{i1}, \quad x_2 = \alpha_{i2}, \quad \ldots,$$

on a

$$P_{11} = \frac{d\varphi_1}{d\alpha_{i1}}, \quad P_{12} = \frac{d\varphi_2}{d\alpha_{i2}}, \quad \ldots.$$

Le polynôme réduit équivalent à V sera une solution de la question, puisqu'il est égal à V quand les équations (2) sont satisfaites.

7. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'éliminer x_1, x_2, ..., x_n entre les équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

$$(4) \qquad F = 0,$$

la dernière étant de degré p en x_1, x_2, ..., x_n et z.

A cet effet, posons

$$(5) \qquad Q = \sum \frac{u_i^2}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})},$$

$$(6) \qquad u_i = \xi_{000\ldots} + \alpha_{i1}\xi_{100\ldots} + \alpha_{i2}\xi_{010\ldots} + \ldots.$$

u_i est un polynôme linéaire et homogène par rapport aux variables ξ dont les coefficients sont les arguments d'un polynôme réduit en α_{i1}, α_{i2}, ... par rapport aux diviseurs $\varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, en sorte que le déterminant de la substitution (6) qui permet d'exprimer les u en fonction des ξ est précisément celui que nous avons appelé Δ.

Le discriminant du polynôme Q homogène et du second degré par rapport aux ξ est égal au discriminant relatif aux u, à savoir $\Pi \frac{1}{FD}$, multiplié par le carré du déterminant de la substitution (6), à savoir $\Delta^2 = \Pi GD$: il est donc égal à $\frac{G}{\Pi F}$.

Changeons de variables et posons

$$(7) \qquad x_{p,q\ldots} = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial \xi_{p,q\ldots}} = \sum \frac{u_i \alpha_{i1}^p \alpha_{i2}^q \ldots}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)}.$$

Commençons à cet effet par résoudre les équations (7). A cet effet, appelons f_i un polynôme réduit nul en même temps que φ_1, φ_2, ..., φ_n, excepté pour $x_1 = \alpha_{i1}$, $x_2 = \alpha_{i2}$, ...; alors, en multipliant les équations (7) par les coefficients de ce polynôme et en les ajoutant, on trouve la formule symbolique

$$(8)\qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{u_i f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)},$$

dans laquelle il faut supposer que, dans le développement du premier membre, on remplace $x_1^p\, x_2^q \ldots$ par $x_{p,q}\ldots$. Or on peut supposer $f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) = \Delta$, d'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent; donc, en remplaçant u_i dans (5) par sa valeur tirée de (8), on a symboliquement

$$(9)\qquad Q = \sum F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots) \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots) f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}{f_i^2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)},$$

formule dans laquelle il faudra faire

$$x_1^p\, x_2^q \ldots = \alpha_1^p\, \alpha_2^q \ldots = x_{p,q}\ldots,$$

après avoir développé le second membre. Appelons δ le nouveau discriminant de Q par rapport aux variables $x_{p,q}, \ldots$; le discriminant de Q relatif aux u que nous avons trouvé égal à $\frac{1}{\Pi FD}$ est égal à δ multiplié par le carré du déterminant de la substitution donnant les x en fonctions de u [formule (7)]. Ainsi on a

$$\frac{1}{\Pi FD} = \delta \times \frac{\Delta^2}{(\Pi FD)^2},$$

d'où l'on tire

$$\delta = \Pi \frac{FD}{\Delta^2} = \frac{\Pi F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})}{G}:$$

le discriminant δ égalé à zéro donnera donc, en vertu d'un théorème connu, la résultante des équations proposées. Donc :

La résultante de plusieurs équations algébriques peut être mise sous la forme d'un déterminant symétrique.

La fonction Q, dont le discriminant égalé à zéro fournit la résultante, peut être mise sous une autre forme plus avantageuse pour le calcul.

Prenons $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ égal à l'équivalent réduit de $\Sigma \pm P_{11} P_{22} \ldots P_{nn}$, les polynômes P_{ij} étant définis comme au n° 6; alors $f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$ sera, comme on l'a vu, dans ce numéro, égal à $D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)$; on aura alors plus simplement

$$(10) \qquad Q = \sum F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) \cdot \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}{D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}.$$

Maintenant, désignons par $f(x_1, x_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ce que devient $f_i(x_1, x_2, \ldots)$, quand on y remplace α_{i1} par α_1, α_{i2} par α_2, ..., α_{in} par α_n, et considérons le polynôme Q avant d'y faire $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q\ldots}$; ce polynôme est alors un polynôme réduit qui, pour $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{12}, \ldots$ se réduit à

$$F(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

qui, pour $x_1 = \alpha_{21}$, $x_2 = \alpha_{22}, \ldots$, se réduit à

$$F(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Ces conditions, comme on l'a vu au n° 4, le déterminent complètement. Or le polynôme réduit, équivalent à

$$F(x_1, x_2, \ldots) f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots),$$

jouit exactement des mêmes propriétés; il est donc égal à Q quand on y suppose $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q} \ldots$, et il est évident que, dans la même hypothèse, on aura aussi Q égal à

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) f(x_1, x_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Ainsi *la résultante des équations* (2), (4) *est le discriminant, égalé à zéro, du polynôme homogène du second* *degré obtenu en faisant* $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q} \ldots$ *dans l'expression*

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) f(x_1, x_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Pour la facilité des calculs, on fera bien de prendre les polynômes P_i, comme il a été indiqué à la fin du n° 5 : la réduction est en effet alors partiellement effectuée.

8. Faisons toujours, comme plus haut,

$$(11) \quad \varphi_i(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = P_i(x_1 - \alpha_1) + \ldots + P_{in}(x_n - \alpha_n);$$

faisons de plus

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x_1, x_2, \ldots) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \\ & \quad = P_{n+1,1}(x_1 - \alpha_1) + \ldots + P_{n+1,n}(x_n - \alpha_n); \end{aligned} \right.$$

enfin posons, en écrivant simplement $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, F$ au lieu de $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots$,

$$(12) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n & F \\ P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} & P_{n+1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} & P_{n+1,n} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant Θ est de la forme

$$(13) \qquad \Theta = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + \lambda F,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des polynômes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et z. Si nous désignons, pour simplifier, par φ'_1, $\varphi'_2, \ldots, F'$ les polynômes $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \ldots$, $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, obtenus en changeant x_1 en α_1, x_2 en $\alpha_2, \ldots$, dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, F$, il est facile de voir que l'on aura encore

$$(14) \qquad \Theta = \lambda_1 \varphi'_1 + \lambda_2 \varphi'_2 + \ldots + \lambda_n \varphi'_n + \lambda F';$$

en d'autres termes, le second membre de (11) n'est pas altéré quand on remplace la première ligne par $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, F'$; cela résulte des formules (11), car, si l'on multiplie la seconde ligne du déterminant Θ par $-(x_1 - \alpha_1)$, la suivante par $-(x_2 - \alpha_2), \ldots$, et si on les ajoute à la première, on remplace, en vertu de (11), cette première ligne par $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, F'$.

Supposons maintenant que $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ soit une solution commune aux équations (2) et (4), Θ sera nul en vertu de (14); donc, en vertu de (13) :

Si les équations $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, F = 0$ ont une solution commune, il existera une infinité de systèmes de multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que l'on ait identiquement

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + \lambda F = 0;$$

le multiplicateur λ_i, en général, est de degré

$$\Sigma m + p - n - m_i.$$

Cela posé, le polynôme Θ étant identiquement nul, en le réduisant par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots$, avec les diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, avec les diviseurs $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n$ qui sont nuls, on obtiendra un nouveau polynôme Θ_1 réduit, qui sera aussi identiquement nul; d'ailleurs, il est évident que le polynôme Θ_1 peut également s'obtenir en réduisant seulement $\lambda F'$, puisque la réduction de

$$\Theta = \lambda_1 \varphi'_1 + \lambda_2 \varphi'_2 + \ldots + \lambda F'$$

est déjà faite partiellement en supprimant

$$\lambda_1 \varphi'_1 + \ldots + \lambda_n \varphi'_n.$$

Ainsi le polynôme Θ_1 s'obtiendra en réduisant $\lambda F'$ ou $F' \Sigma \pm P_{11} P_{22} \ldots P_{nn}$; mais, Θ_1 étant identiquement nul, les coefficients des arguments $x_1^p x_2^q \ldots$ de ses divers termes seront nuls; en égalant ces coefficients à zéro, on aura un système d'équations en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, que j'appellerai (E), satisfait en supposant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

remplacés par une solution commune à (2) et à (4). Ces équations (E) sont en nombre égal à $m_1 m_2 \ldots m_n$, nombre des arguments d'un polynôme réduit; elles contiennent $m_1 m_2 \ldots m_n$ arguments $\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots$ sous forme linéaire et homogène; entre ces équations, on pourra éliminer les arguments $\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots$ en question.

Je dis que la résultante sera précisément la résultante des équations (2), (4).

En effet, le polynôme Θ_1 n'est autre chose que le polynôme que nous avons appelé Q dans le paragraphe précédent, avant d'y supposer

$$x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q\ldots};$$

les équations (E) ne sont autres que les équations $\dfrac{\partial Q}{\partial x_{p,q\ldots}} = 0$, quand on y suppose

$$\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{p,q\ldots},$$

et, par suite, leur résultante n'est autre que le discriminant de Q égalé à zéro.

Cette remarque nous fait voir que la solution commune aux équations (2), (4), quand il y en aura une, sera donnée par les équations (E), qui non seulement feront connaître $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, mais encore tous les arguments réduits que l'on peut former avec ces quantités.

9. La possibilité d'appliquer notre méthode d'élimination suppose que les équations données soient telles que l'on puisse en choisir n, telles que leurs premiers membres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ puissent servir de diviseurs à un système de réductions; pour cela, il est nécessaire que les équations (2) n'aient pas, quel que soit z, une solution multiple ou infinie; le cas où les équations (2) auraient une solution infinie peut être facilement écarté au moyen d'une substitution linéaire, mais le cas où il

existerait une solution double ne peut pas être écarté aussi facilement, qu'elle soit finie ou infinie; si donc cette particularité se présentait, on la ferait disparaître en faisant varier infiniment peu les coefficients d'une ou plusieurs des équations données, ce qui, comme l'on sait, ne fait varier que très peu les solutions.

Reprenons les équations (E) : leur déterminant étant désigné par Z, la résultante cherchée sera $Z = 0$, et si l'on suppose que les coefficients des équations proposées qui sont de degré k par rapport à la variable z, contiennent une variable t à la puissance k au plus, l'équation $Z = 0$ sera satisfaite pour $\Pi m.p$ valeurs de t; considérons l'une d'elles en particulier.

Si tous les mineurs de Z ne sont pas nuls, alors les équations (E) se réduisent à $\Pi m.p - 1$ distinctes et font connaître un système de valeurs des arguments $\alpha_1^p \alpha_2^q \ldots$ unique, plusieurs d'entre eux pouvant être infinis.

Si tous les mineurs du premier ordre de Z sont nuls, d'abord $Z = 0$ admet t pour racine double, car, en appelant e un élément de Z et $\frac{\partial Z}{\partial e}$ le mineur correspondant, on a

$$\frac{dZ}{dt} = \sum \frac{\partial Z}{\partial e} \frac{de}{dt} = 0;$$

les équations (E) ne sont plus qu'au nombre de $\Pi m.p - 2$ distinctes; entre ces équations, on pourra éliminer tous les arguments, excepté x_1 et x_1^2, par exemple, ce qui fournira deux valeurs de x_1 et deux systèmes de valeurs correspondantes des autres inconnues.

Si tous les mineurs du second ordre de Z sont nuls, $Z = 0$ admet t pour racine triple; en effet, appelant e et e' deux éléments de Z, et $\frac{\partial^2 Z}{\partial e\, \partial e'}$ le mineur de z du second ordre correspondant, on a

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial e \, \partial e'} \frac{de}{dt} \frac{de'}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial e} \frac{d^2 e}{dt^2} \right) = 0;$$

les équations (E) se réduisent à $\Pi m.p - 3$ distinctes et font connaître trois systèmes de valeurs des inconnues, et ainsi de suite; de sorte que, si Z n'est pas identiquement nul, le système (2), (4) admettra $\Pi m.p$ solutions, en comptant en général pour k solutions une solution multiple d'ordre k.

Lorsque le déterminant Z sera identiquement nul, quel que soit t, les équations proposées auront une solution, elles seront alors satisfaites pour une infinité de valeurs de $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$; mais, Z étant identiquement nul, ses mineurs ne le seront pas en général, mais pourront le devenir pour une valeur particulière de t; pour cette valeur, il y aura alors deux systèmes de valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on voit, du reste, comment on achèverait cette discussion, en examinant le cas où les mineurs du premier, du second ordre, etc., seraient identiquement nuls.

Lorsque trois surfaces du second ordre se coupent suivant une même génératrice, leurs points communs se composent de cette génératrice et des points communs à leurs courbes gauches d'intersection; dans ce cas, la résultante de leurs équations est identiquement nulle, et les mineurs de leur résultante s'annulent accidentellement.