

L. CHAUCHAT

**Solution analytique des questions
1387 et 1395**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 136-138

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__136_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DES QUESTIONS 1587 ET 1595;

PAR M. L. CHAUCHAT,

Élève du Lycée Condorcet.

Prenons pour axes les bissectrices de l'angle des tangentes communes D et D' ; soit $\tan \varphi$ le coefficient angulaire de D . Le cercle C a pour équation

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \varphi$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Le cercle C' a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2a_1x + a_1^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Soient (α, β) le centre de l'un des cercles mobiles et λ le rayon de ce cercle. Un point du lieu sera donné par l'intersection d'une parallèle $y = \beta$ à l'axe des x et d'une droite dont la distance au point (α, β) est égale à λ . On aura donc

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = (\alpha \sin \varphi + \lambda)^2,$$

$$(x - \alpha_1)^2 + \beta^2 = (\alpha_1 \sin \varphi + \lambda)^2,$$

$$y = x \operatorname{tang} \varphi + n,$$

$$y = \beta,$$

$$\frac{\beta - x \operatorname{tang} \varphi - n}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}} = \lambda.$$

Remplaçant β par y et supprimant la quatrième équation, on a

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = (\alpha \sin \varphi + \lambda)^2,$$

$$(2) \quad (x - \alpha_1)^2 + y^2 = (\alpha_1 \sin \varphi + \lambda)^2,$$

$$(3) \quad y - n = x \operatorname{tang} \varphi,$$

$$(4) \quad \frac{y - x \operatorname{tang} \varphi - n}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}} = \lambda.$$

Remplaçant, dans l'équation (4), $y - n$ par sa valeur tirée de l'équation (3), il vient

$$(5) \quad (x - \alpha) \sin \varphi = \lambda.$$

Si l'on ordonne l'équation (1) en α , on aura une équation du deuxième degré dont les racines seront α et α_1 . De cette équation

$$\alpha^2 \cos^2 \varphi - 2\alpha(\alpha + \lambda \sin \varphi) + y^2 + \alpha^2 - \lambda^2 = 0,$$

on tire

$$(6) \quad (\alpha + \alpha_1) \cos^2 \varphi = 2\alpha + 2\lambda \sin \varphi,$$

$$(7) \quad \alpha\alpha_1 \cos^2 \varphi = y^2 + \alpha^2 - \lambda^2.$$

Les équations (5) et (6) étant du premier degré en α et λ , on les résout, et l'on porte les valeurs trouvées dans l'équation (7); on a l'équation du lieu demandé.

Les valeurs de α et de λ sont

$$\alpha = \frac{a + a_1}{2} - x \operatorname{tang}^2 \varphi,$$

$$\lambda = \frac{x \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{a + a_1}{2} \sin \varphi,$$

et l'équation du lieu

$$aa_1 \cos^2 \varphi = y^2 + \left[\frac{(a + a_1)^2}{4} - x^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \right] \cos^2 \varphi,$$

ou

$$4y^2 - 4x^2 \operatorname{tang}^2 \varphi + (a - a_1)^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

C'est une hyperbole rapportée à ses axes, ayant pour asymptotes les tangentes communes et passant par les points de rencontre des deux cercles, car ces points peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul tangents aux cercles C et C'.

On déduit de là, en raisonnant comme dans la solution de M. Château, le théorème qui fait l'objet de la question 1395.

Note. — Solution analytique de la même question par M. Moret-Blanc.