NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Représentation des fonctions d’une ou de plusieurs variables, entre de certaines limites de ces variables, par des séries procédant suivant les valeurs, relatives à un indice variable et multipliées par des coefficients constants, d’une fonction qui satisfait à une certaine forme d’équations aux différentielles ordinaires ou partielles du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 109-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__109_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS

D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES, ENTRE DE CERTAINES LIMITES DE CES VARIABLES, PAR DES SÉRIES PROCÉDANT SUIVANT LES VALEURS, RELATIVES A UN INDICE VARIABLE ET MULTIPLIÉES PAR DES COEFFICIENTS CONSTANTS, D'UNE FONCTION QUI SATISFAIT A UNE CERTAINE FORME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES OU PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. A. PICART.

1. — *Cas d'une seule variable.*

On sait qu'on peut toujours déterminer les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ de la série

$$A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots,$$

de manière qu'elle représente une fonction quelconque $f(x)$ entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ de x.

Ils sont donnés par les formules

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 2\pi A_0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos ix\,dx = A_i \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 ix\,dx = \pi A_i,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin ix\,dx = B_i \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 ix\,dx = \pi B_i.$$

Les fonctions $\cos nx$ et $\sin nx$ qui, d'un terme au suivant, varient avec l'indice n, satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2 u = 0.$$

Si l'on considère deux solutions u et u' de cette équation, correspondant à deux valeurs différentes quelconques n et n' de l'indice n, on voit qu'il existe entre ces valeurs la relation

$$\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)_a^b = (n'^2 - n^2)\int_a^b uu'\,dx,$$

et si la quantité $u'\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{du'}{dx}$ est nulle, ou prend la même valeur aux deux limites a et b, cette relation devient

$$\int_a^b uu'\,dx = 0.$$

C'est cette propriété de la fonction u qui sert de base au mode de détermination des coefficients du développement en série.

Généralement, si une fonction u de x satisfait à une équation de la forme

$$\frac{d\left[\varphi(x)\frac{du}{dx}\right]}{dx} + \mathrm{F}(x,n)\,u = 0,$$

on aura, en désignant par u' la valeur de u qui correspond à l'indice n',

$$\left[\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)\varphi(x)\right]_a^b = \int_a^b [\mathrm{F}(x,n') - \mathrm{F}(x,n)]uu'dx;$$

par conséquent, si la quantité

$$\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)\varphi(x)$$

est nulle, ou prend la même valeur aux deux limites a et b, et si $\mathrm{F}(x,n') - \mathrm{F}(x,n)$ se réduit à une constante multipliée par une fonction $\lambda(x)$, on aura

$$\int_a^b \lambda(x)\,uu'\,dx = 0.$$

D'où il résulte que la série

$$\mathrm{A}_{\alpha_0}u_{\alpha_0} + \mathrm{A}_{\alpha_1}u_{\alpha_1} + \mathrm{A}_{\alpha_2}u_{\alpha_2} + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha_i}u_{\alpha_i} + \ldots,$$

dans laquelle u_{α_i} désigne la valeur de u correspondant à la valeur α_i de l'indice n, pourra représenter une fonction quelconque $f(x)$, entre les limites a et b, lorsque le coefficient A_{α_i} sera déterminé par la formule

$$\int_a^b f(x)\,u_{\alpha_i}dx = \mathrm{A}_{\alpha_i}\int_a^b \lambda(x)\,u_{\alpha_i}^2dx.$$

Ainsi, par exemple, si l'on considère la fonction $u = \cos nx$, l'indice n satisfaisant à l'équation

$$nl \tang nl = \text{const.},$$

on pourra développer une fonction $f(x)$, de 0 à l, suivant la somme des différentes valeurs en nombre infini de $\cos nx$, multipliées chacune par une constante. Car $\cos nx$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + n^2 u = 0,$$

et de plus la quantité $u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}$, s'annule pour $x = 0$ et $x = l$, puisqu'elle est égale ici à

$$-n \cos n'x \sin nx + n' \cos nx \sin n'x,$$

qui est nul pour $x = 0$ et devient, pour $x = l$,

$$-n \cos n'l \sin nl + n' \cos nl \sin n'l$$

ou

$$(-nl \operatorname{tang} nl + n'l \operatorname{tang} n'l) \cos nl \cos n'l,$$

c'est-à-dire zéro, en vertu de l'équation de condition.

De même une fonction donnée quelconque de n pourra se développer entre les limites -1 et $+1$ suivant les valeurs de la fonction $\theta(x, n, l)$ correspondant à toutes les valeurs entières de n de 0 à $+\infty$ et multipliées chacune par un coefficient, si $\theta(x, n, l)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d\left[(1-n^2)\frac{d\theta}{dx}\right]}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{l^2}{1-x^2}\right]\theta = 0,$$

puisqu'on a

$$\int_{-1}^{+1} \theta\theta' \, dx = 0.$$

De même la série

$$A_0 + A_1 R + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n + \ldots$$

pourra représenter une fonction de x quelconque entre les limites 0 et ρ, si R_n satisfait à l'équation

$$\frac{d.x^2 \dfrac{dR_n}{dx}}{dx} + [n(n+1) - l^2 x^2] R_n = 0,$$

et si la quantité

$$R_n \frac{dR_n}{dx} - R_n \frac{dR'_n}{dx}$$

s'annule pour $x = \rho$.

II. — *Cas de deux variables.*

Supposons maintenant que $U(x, y, n)$ soit une fonction de deux variables x et y satisfaisant à l'équation

$$\varphi(y) \frac{d\left[f_1(x,y)\frac{dU}{dx}\right]}{dx} + \psi(x) \frac{d\left[f_2(x,y)\frac{dU}{dy}\right]}{dy} + F(x, y, n)U = 0.$$

On aura, pour une autre valeur n' de l'indice,

$$\varphi(y) \frac{d\left[f_1(x,y)\frac{dU'}{dx}\right]}{dx} + \psi(x) \frac{d\left[f_2(x,y)\frac{dU'}{dy}\right]}{dy} + F(x, y, n')U' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \left[f_1(x,y)\left(U'\frac{dU}{dx} - U\frac{dU'}{dx}\right)\right]_{x=a}^{x=b} \varphi(y)\,dy \\
&\quad - \int_a^b \left[f_2(x,y)\left(U'\frac{dU}{dy} - U\frac{dU'}{dy}\right)\right]_{y=c}^{y=d} \psi(x)\,dx \\
&\quad = \int_a^b \int_c^d [F(x,y,n') - F(x,y,n)]UU'\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Si la fonction $f_1(x,y)$ est nulle ou prend la même valeur pour $x = a$ et $x = b$, en même temps que $f_2(x,y)$ est nulle ou prend la même valeur pour $y = c$ et $y = d$;

si $U'\frac{dU}{dx} - U\frac{dU'}{dx}$ est nul ou prend la même valeur pour $x = a$ et $x = b$, en même temps que $U'\frac{dU}{dy} - U\frac{dU'}{dy}$ est nul ou prend la même valeur pour $y = c$ et $y = d$; ou que $f_1(x, y)$ soit nul ou prenne la même valeur pour $x = a$ et $x = b$, en même temps que $U'\frac{dU}{dy} - U\frac{dU'}{dy}$ est nul ou prend la même valeur pour $y = c$ et $y = d$; ou enfin que $f_2(x, y)$ soit nul ou prenne la même valeur pour $y = c$ et $y = d$, en même temps que $U'\frac{dU}{dx} - U\frac{dU'}{dx}$ s'annule ou prend la même valeur pour $x = a$ et $y = b$; si, en outre, la différence $F(x, y, n') - F(x, y, n)$ se réduit à une constante, fonction de n, n', multipliée par une fonction $\lambda(x, y)$, on voit qu'on aura

$$\int_a^b \int_c^d \lambda(x, y)\,UU'\,dx\,dy = 0.$$

Par suite, une fonction quelconque $\Phi(x, y)$ pourra se développer en une série de la forme

$$\Phi(x, y) = \Sigma_n A_n U(x, y, n),$$

et l'on aura

$$\int_a^b \int_c^d \Phi(x, y)\lambda(x, y)\,U(x, y, n)\,dx\,dy$$
$$= A_n \int_a^b \int_c^d \lambda(x, y)\,U^2(x, y, n)\,dx\,dy,$$

ce qui déterminera la constante A_n.

Ainsi, par exemple, la fonction Y_n satisfaisant à l'équation

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\frac{dY_n}{d\mu}\right]}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2Y_n}{d\psi^2} + n(n+1)Y_n = 0,$$

$1-\mu^2$ s'annulant pour $\mu=-1$ et $\mu=+1$, et

$$Y_{n'}\frac{dY_n}{d\psi}-Y_n\frac{dY'_n}{d\psi}$$

prenant la même valeur pour $\psi=0$ et $\psi=2\pi$, si Y_n est une fonction périodique de l'angle ψ, de période 2π, on pourra développer une fonction quelconque $\Phi(\mu,\psi)$ de deux variables μ et ψ, entre les limites -1 et $+1$ pour μ, et 0 et 2π pour ψ, suivant une série de fonctions Y_n multipliées chacune par une constante, ou écrire

$$\Phi(\mu,\psi)=\sum_0^n A_n Y_n,$$

le coefficient A_n étant déterminé par la formule

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\Phi(\mu,\psi)Y_n\,d\mu\,d\psi=A_n\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}Y_n^2\,d\mu\,d\psi.$$

Mais, pour déterminer ainsi les coefficients, nous avons admis le développement en série comme possible, ou plutôt nous avons admis que la série fournie avec les diverses valeurs de la fonction u, multipliées par les coefficients ainsi déterminés, représentait la fonction donnée. Or cela est loin d'être évident.

Voici comment on peut le démontrer généralement.

I. — *Cas d'une seule variable.*

D'après le mode de calcul des coefficients A_{α_i} de la série

$$A_{\alpha_0}u_{\alpha_0}^{(x)}+A_{\alpha_1}u_{\alpha_1}^{(x)}+A_{\alpha_2}u_{\alpha_2}^{(x)}+\ldots+A_{\alpha_i}u_{\alpha_i}^{(x)}+\ldots,$$

les intégrales prises de a à b de cette série et de la fonction donnée $f(x)$, après leur multiplication par une certaine fonction $\lambda(x)$ et par chacune des valeurs de la fonction $u^{(x)}$ correspondant à toutes les valeurs en nombre infini de l'indice n, ces intégrales sont égales. Il en résulte nécessairement que pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b la somme de la série est égale à la valeur de la fonction. En effet, représentons par $\varphi(x)$ la somme de la série; divisons l'intervalle de a à b en p parties égales; désignons par h l'une des parties et posons $a+h=x_1$, $a+2h=x_2,\ldots$, $a+(p-1)h=x_{p-1}$. Si p est infiniment grand, on pourra regarder les intégrales, de a a b, des deux fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ multipliées par $\lambda(x)u_{\alpha_i}$, comme égales, l'une à

$$m_0\varphi(a)+m_1\varphi(x_1)+m_2\varphi(x_2)+\ldots+m_{p-1}\varphi(x_{p-1}).$$

l'autre à

$$m_0f(a)-mf(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_{p-1}f(x_{p-1}),$$

la quantité m_q représentant l'expression

$$\lambda(x_q)u_{\alpha_i}^{(x_q)}h.$$

On a donc

$$\begin{aligned}&m_0\varphi(a)+m_1\varphi(x_1)+\ldots+m_{p-1}\varphi(x_{p-1})\\&\quad=m_0f(a)+m_1f(x_1)+\ldots+m_{p-1}f(x_{p-1}),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}m_0[\varphi(a)-f(a)]+m_1[\varphi(x_1)-f(x_1)]&\\-m_2[\varphi(x_2)-f(x_2)]+\ldots&\\+m_{p-1}[\varphi(x_{p-1})-f(x_{p-1})=0.&\end{aligned}$$

Cette egalite doit avoir lieu pour une infinité de systèmes i de valeurs des quantités $m_0, m_1, m_2,\ldots, m_{p-1}$, indépendants entre eux, correspondant à toutes les valeurs en nombre infini de l'indice n; ce qui, d'après la théorie des equations linéaires, exige que l'on ait

$$\varphi(a)-f(a)=0,\quad \varphi(x_1)-f(x_1)=0,$$
$$\varphi(x_2)-f(x_2)=0,\quad \ldots,\quad \varphi(x_{p-1})-f(x_{p-1})=0,$$

c'est-à-dire que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ prennent les mêmes valeurs pour toute valeur de x comprise entre a et b.

On peut donc écrire, quand le coefficient A_{α_i} est déterminé par la règle ci-dessus,

$$f(x) = \Sigma A_{\alpha_i} u_{\alpha_i}.$$

II. — *Cas de deux variables.*

De même, si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ la somme de la série

$$A_{\alpha_0} U_{\alpha_0} + A_{\alpha_1} U_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} U_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_i} U_{\alpha_i} + \ldots,$$

dont les coefficients ont été formés avec la fonction donnée $f(x, y)$ par l'application de la formule

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \lambda(x, y) U_{\alpha_i} dx\, dy$$
$$= A_{\alpha_i} \int_a^b \int_c^d \lambda(x, y) U_{\alpha_i}^2 dx\, dy,$$

on a, pour chacune des valeurs en nombre infini de l'indice n,

$$\sum_{p=1}^{p=s} \sum_{q=1}^{q=t} m_{p,q} f(x_p, y_q) = \sum_{p=1}^{p=s} \sum_{q=1}^{q=t} m_{p,q} \varphi(x_p, y_q),$$

l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ étant supposé partagé en s parties égales à h et celui de $y = c$ à $y = d$ en t parties égales à k, x_p et y_q représentant respectivement $a + ph$ et $c + qk$, et $m_{p,q}$ étant la valeur du multiplicateur $\lambda(x, y) U_{\alpha_i} hk$ pour $x = x_p$ et $y = y_q$.

Cette égalité peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^{p=s} \sum_{q=1}^{q=t} m_{p,q} [f(x_p, y_q) - \varphi(x_p, y_q)] = 0;$$

et, comme elle a lieu pour une infinité de systèmes indépendants de valeurs des coefficients $m_{p,q}$, correspondant chacun à chacune des valeurs en nombre infini de l'indice n, on en conclut

$$f(x_p, y_q) = \varphi(x_p, y_q),$$

c'est-à-dire que les deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ prennent les mêmes valeurs pour tout système de valeurs de x et y compris entre $x = a$, $x = b$ et entre $y = c$, $y = d$.

Il convient de remarquer que ce théorème se trouverait évidemment en défaut dans le cas où la fonction u serait de sa nature essentiellement paire ou impaire par rapport à l'une des variables et où on l'assujettirait à fournir le développement en série d'une fonction impaire ou paire de cette variable entre deux limites $-a$, $+a$ égales et de signes contraires.