NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 7-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__7_1>

SUR QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME DE SAVARY, RELATIF AUX ENVELOPPES DES COURBES PLANES;

PAR M. H. RESAL.

1. Soient, dans un plan,

(S) une courbe qui roule sur une courbe fixe (S');
A le point de contact de ces courbes;
R, R' leurs rayons de courbure en ce point;
ma une courbe tracée dans le plan de (s);
$p = Am$ la longueur de la normale abaissée du point A sur ma;
φ l'angle formé par la direction de Am avec celle de R;
ρ le rayon de courbure en m de la courbe ma;
ρ' le rayon de courbure au même point de l'enveloppe ma' de cette courbe.

En supposant que (S) et (S') opposent leurs convexités, le théorème de Savary consiste dans la formule

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{\rho'-p}+\frac{1}{\rho+p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}.$$

Dans le cas où les courbes (S) et (S′) seraient intérieures l'une à l'autre, on affecterait du signe — le plus grand des rayons de courbure R et R′.

Nous allons d'abord déduire de l'équation (1) quelques théorèmes connus, en admettant que (S) et (S′) sont deux circonférences.

2. *Enveloppe d'une hypocycloïde ou d'une épicycloïde.* — Supposons que *am* soit la courbe décrite par un point d'une circonférence (S_1) de rayon R_1 roulant intérieurement sur (S); la normale en *m* doit passer par le point de contact de ces deux circonférences, qui se confond par suite avec A.

Pour obtenir le rayon de courbure ρ_1 de *ma*, nous remplacerons dans la formule (1), eu égard au sens des courbures, ρ' par $-\rho_1$, R par $-R_1$, R′ par R_1, en supposant de plus $\rho=0$. Il vient ainsi

$$\left(-\frac{1}{\rho_1+p}+\frac{1}{p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}.$$

Le rayon de courbure ρ' de l'enveloppe de *ma* se déterminera au moyen de la formule (1) en y remplaçant ρ par ρ_1, ce qui donne

$$\left(\frac{1}{\rho'-p}+\frac{1}{\rho_1+p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'},$$

d'où, par addition,

$$\left(\frac{1}{\rho'-p}+\frac{1}{p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'}.$$

Cette dernière équation définit bien l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence (S_1) roulant sur la circonférence (S').

Réciproquement, l'hypocycloïde *ma* est l'enveloppe des positions de l'épicycloïde déterminée par un point de la circonférence (S_1) roulant extérieurement sur (S').

3. *Enveloppe de la développante d'une circonférence concentrique à* (S). — Dans ce cas, l'angle φ est constant et l'on a évidemment

$$p + \rho = R\cos\varphi,$$

et le rayon de la circonférence développée est $R\sin\varphi$.

La formule (1) donne par suite

$$\frac{\cos\varphi}{\rho' - p} = \frac{1}{R'},$$

d'où

$$\rho' - p = R'\cos\varphi :$$

ce qui est bien l'équation de la développante de la circonférence concentrique à (S') et dont le rayon serait $R'\sin\varphi$.

4. *Enveloppe d'une circonférence* (S_1) *de rayon* ρ *dont le centre se trouve sur la circonférence* (S). — Si nous considérons, par exemple, le point m de la partie intérieure de l'enveloppe, on a

$$p + \rho = 2R\cos\varphi,$$

et la formule (1) donne

$$\rho' - p \frac{2RR}{2R + R'}\cos\varphi,$$

d'où, par addition,

$$\rho' + \rho = \frac{4R(R + R')}{2R + R'}\cos\varphi.$$

Mais en supposant $\rho = 0$, cette dernière formule ferait connaitre le rayon de courbure ρ' de l'épicycloïde décrite par le centre de (S_1). D'où il suit que la branche considérée (et il en est de même de l'autre en remplaçant ρ par $-\rho$) est parallèle à cette épicycloïde.

5. *Quelles que soient les courbes* (S) *et* (S') *et la nature de l'enveloppée, l'enveloppe peut être décrite, au moins en partie, par un point du plan d'une courbe* (S_1) *qui roulerait sur* (S'). — Soit R_1 le rayon de la courbe cherchée (S_1) au point A. La formule (1) donne, en y faisant $\rho = 0$ et remplaçant R par R_1,

$$\left(\frac{1}{\rho' - p} + \frac{1}{p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'},$$

et, en retranchant cette équation de la formule précitée, on trouve

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{\rho\cos\varphi}{(\rho + p)p}; \tag{2}$$

on voit ainsi que la nature de la courbe (S_1) est indépendante de la forme de la courbe (S').

6. Si l'enveloppée est une droite, on a $\rho = \infty$ et

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{\cos\varphi}{p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D}. \tag{3}$$

en désignant par D la portion de la normale en A à (S) déterminée par la droite.

Dans le cas où (S) est une circonférence et l'enveloppée un rayon de cette circonférence, on a $p = R\cos\varphi$, d'où

$$R_1 = \frac{R}{2}.$$

On vérifie ainsi que l'enveloppe est l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence, dont le diamètre est R, qui roulerait sur (S').

7. Supposons maintenant que am soit la développante d'une circonférence concentrique à (S), et dont le rayon est par suite $R\sin\varphi$. Nous avons

$$p+\rho=R\cos\varphi$$

et la formule (2) donne

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R}+\frac{\rho}{pR}=\frac{1}{R}\left(1+\frac{R\cos\varphi-p}{p}\right),$$

d'où

$$R_1=\frac{p}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Soit θ l'angle formé par le rayon vecteur $mA=p$ du point de la courbe cherchée (S_1) avec une droite mx fixe dans son plan. L'angle formé par la normale en A à (S_1) avec mx étant $\theta-\varphi$, l'angle de contingence est $d\theta$, et l'on a par suite

$$R_1^2=\frac{p^2\,d\theta^2+dp^2}{d\theta^2},$$

et, en vertu de la formule (4),

$$\frac{dp}{p}=\operatorname{tang}\varphi\,d\theta,$$

d'où, en désignant par A une constante,

$$p=Ae^{\operatorname{tang}\varphi\theta},$$

ce qui représente une spirale logarithmique si A est positif. L'origine de la spirale roulant sur la circonférence (S') ne décrira qu'une courbe intérieure à cette circonférence, qu'elle ne rencontrera que pour $\theta=-\infty$ [1].

Donc l'origine de la spirale ne décrira que la portion

---

[1] On reconnaît facilement que, entre $\theta=0$ et $\theta=-\infty$, la longueur de l'arc de la spirale est finie et a pour valeur $\frac{A}{\sin\varphi}$.

extérieure à (S) de la développante du cercle concentrique ayant pour rayon $R' \sin\varphi$.

La partie intérieure de l'enveloppe sera obtenue en prenant A négatif.

8. *Enveloppe d'une normale à une ellipse* (S) *qui roule sur une courbe fixe* (S') (¹).

Soient, dans une position quelconque :

$BB' = 2a$ le grand axe de l'ellipse dont O est le centre;
I l'intersection de la normale en A aux courbes (S) et (S') avec le grand axe;
mN la normale enveloppée rencontrant BB' en J, m désignant le point correspondant de l'enveloppe;
α l'angle donné NJB et α' l'angle variable AIB.

Nous attribuerons aux lettres a, b, c leurs significations ordinaires et nous poserons

$$m = \operatorname{tang}\alpha, \quad m' = \operatorname{tang}\alpha', \tag{5}$$

d'où

$$d\alpha' = \frac{dm'}{1 + m'^2}. \tag{6}$$

Nous savons que la normale au point A de l'ellipse rapportée à ses axes a pour équation

$$y = m'\left(x - \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}\right) \tag{7}$$

et que les coordonnées de ce point ont pour expressions

$$x' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}, \quad y' = \frac{b^2 m'}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}. \tag{8}$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées de l'intersection I des

(¹) Le problème se rapporte à la question des engrenages elliptiques.

normales NJ et AI; on a

$$y_1 = m\left(x_1 - \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}\right),\quad y_1 = m'\left(x_1 - \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}\right),$$

d'où

$$x_1 = \frac{c^2}{m-m'}\left(\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}} - \frac{m'}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}\right),$$

$$y_1 = \frac{c^2mm'}{m-m'}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2m^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}\right)$$

et, en se reportant aux valeurs (8),

$$x_1 - x' = \frac{1}{m-m'}\left(\frac{c^2m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}} + \frac{b^2m'-a^2m}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}\right),$$

$$y_1 - y' = \frac{m'}{m-m'}\left(\frac{c^2m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}} + \frac{b^2m'-a^2m}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}\right).$$

On déduit de là, pour la distance $AL = D$,

$$(9)\qquad D = -\frac{1}{m-m'}\left(\frac{c^2m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}} + \frac{b^2m'-a^2m}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}\right)\sqrt{1+m'^2}.$$

Nous avons pris le signe — pour le radical, pour que l'on obtienne un résultat positif quand on suppose $m = m'$, et l'on obtient ainsi

$$(10)\qquad D = R = a^2b^2\left(\frac{1+m'^2}{a^2+b^2m'^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui est bien l'expression connue du rayon de courbure de l'ellipse.

On déduit des formules (8), (9) et (10)

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{R}{R_1} &= 1 - a^2b^2\sqrt{a^2+b^2m^2}\,\frac{1+m'^2}{a^2+b^2m'^2} \\ &\times \frac{m-m'}{\left[c^2m\sqrt{a^2+b^2m'^2}+(b^2m'-a^2m)\sqrt{a^2+b^2m^2}\right]}. \end{aligned}\right.$$

Soient mx une droite fixe dans le plan de (S_1) partant du point m qui sera l'origine des coordonnées auxquelles on rapportera cette courbe; ds l'élément commun à (S) et (S_1), θ l'angle formé par mJ avec mx. Nous avons

$$\frac{R}{R_1} = \frac{d\theta}{d\alpha'} = \frac{d\theta}{dm'}(1 + m'^2),$$

et, d'après l'équation (11),

$$d\theta = d\alpha' - a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2 m^2} \times \frac{(m - m')\,dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)\left[c^2 m \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} + (b^2 m' - a^2 m)\sqrt{a^2 + b^2 m^2}\right]}.$$

Pour fixer les idées, nous considérons le roulement à partir du moment où B se trouvait sur (S'), et nous supposerons que mx coïncidait avec la portion initiale de mJ, de sorte que l'on a $\theta = \alpha$ pour $\alpha' = 0$ ou $m' = 0$.

Nous avons ainsi

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\theta = \operatorname{arc\,tang} m' + \alpha - a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2 m^2} \\ &\times \int_0^{m'} \frac{(m - m')\,dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)\left[c^2 m \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} + (b^2 m' - a^2 m)\sqrt{a^2 + b^2 m}\right]}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (10) peut se mettre sous la forme

$$\frac{ds}{d\alpha'} = a^2 b^2 \left(\frac{1 + m'^2}{a^2 + b^2 m'^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$ds = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2)\,dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous avons ainsi pour (S_1)

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= ds \sin\theta = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2) \sin\theta\,dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ dy &= -\,ds \cos\theta = -\frac{a^2 b^2 (1 + m'^2) \cos\theta\,dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

et les équations (12) et (13) permettront de déterminer

x et y en fonction de la variable auxiliaire m'. On peut d'ailleurs, en remplaçant cette variable par une autre, convenablement choisie, simplifier et même réduire quelques-unes des transcendantes qui entrent dans les expressions de x et y.