NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAQUIÈRE

Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du Tore

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 561-565

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__561_0>

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA TANGENTE ET DU RAYON DE COURBURE DES SECTIONS PLANES DU TORE;

PAR M. LAQUIÈRE.

Considérons le tore comme l'enveloppe d'une sphère de rayon constant r, dont le centre décrit un cercle de rayon a. Un plan quelconque sera défini par l'angle φ qu'il fait avec l'axe du tore, ou axe du cercle lieu des centres, et la distance p du point Ω, où il coupe l'axe, au centre de la surface.

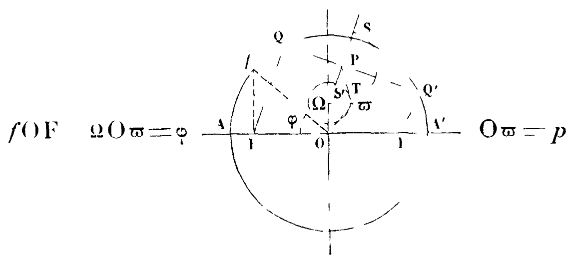
Cela posé, les centres des sphères enveloppées par le tore auront pour projection une ellipse de rayons principaux a et $a \sin\varphi$, ce dernier dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan sécant, en supposant l'axe du tore vertical. Ces projections seront les centres des cercles d'intersection du plan sécant avec les sphères enveloppées, cercles dont l'enveloppe sera elle-même la courbe d'intersection du tore et du plan considéré.

Les lignes de contact des sphères avec le tore étant des méridiens de la surface sont contenues dans des plans passant par l'axe, et par suite les cordes de contact des cercles enveloppés par la courbe d'intersection du plan et de la surface passent toutes par le point Ω, où le plan est percé par l'axe. De plus, comme cordes d'intersection de deux cercles infiniment voisins, elles sont perpendiculaires à la ligne des centres, c'est-à-dire à la tangente à l'ellipse lieu des centres. Ainsi :

Le diamètre polaire de la section plane du tore est la podaire, par rapport au point Ω, de l'ellipse projection du cercle directeur de la surface canal. Mais, d'autre part, le produit des distances du pôle Ω aux deux points de la courbe situés sur le même rayon, et ayant pour milieu un point de la podaire à l'ellipse, est constant et égal à la puissance $(a^2 + p^2 - r^2)$ du point Ω par rapport aux sphères enveloppées. Les points de la courbe d'intersection se déterminent donc avec la plus grande facilité par la construction suivante :

Sur un diamètre AA' du cercle O de rayon a (*fig.* 1), prenons $OF = OF' = a \cos \varphi$. L'ellipse auxiliaire aura

Fig. 1.



AA' pour grand axe et F, F' pour foyers. Sur le rayon perpendiculaire à AA', prenons $O\Omega = p \cos \varphi$; le point Ω sera la trace de l'axe du tore sur le plan sécant ; enfin, autour du point Ω, traçons un cercle de rayon

$$f = \sqrt{a^2 + p^2 - r^4}.$$

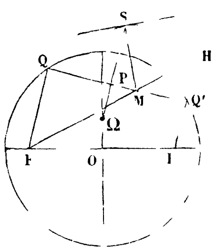
Menons les parallèles FQ, F'Q' au rayon vecteur ΩP, sur lequel nous voulons déterminer les points de la courbe d'intersection. La corde QQ' du cercle O de rayon a sera tangente à l'ellipse des centres au centre du cercle sur lequel se trouvent les points S et S' cherchés. Menons la parallèle ΩP à ces droites. Son pied P sur QQ' sera le point de la podaire, milieu des points cherchés, et si, sur cette droite, de part et d'autre du point P, on rabat la tangente PT menée de ce point au cercle Ω, les extrémités S et S′ de ces rabattements seront les points cherchés de la courbe d'intersection.

Cette construction permet d'écrire immédiatement l'équation de la courbe en coordonnées polaires, en prenant la droite ΩO pour axe polaire et Ω pour pôle :

$$\rho^2 + 2\rho\left(a\sqrt{\sin^2\omega + \sin^2\varphi\cos^2\omega} - p\sin\varphi\cos\omega\right) + a^2 - r^2 + p^2 = 0.$$

Construction de la tangente. — Considérons le point S de la courbe que l'on sait construire ainsi qu'il précède (*fig.* 2). Joignons-le au point M où la droite QQ′

Fig. 2.



touche l'ellipse auxiliaire, intersection de QQ′ avec la droite qui joint le foyer F au point H symétrique du second foyer par rapport à cette droite.

La droite SM, rayon du cercle enveloppé par la courbe d'intersection, sera la normale à cette dernière.

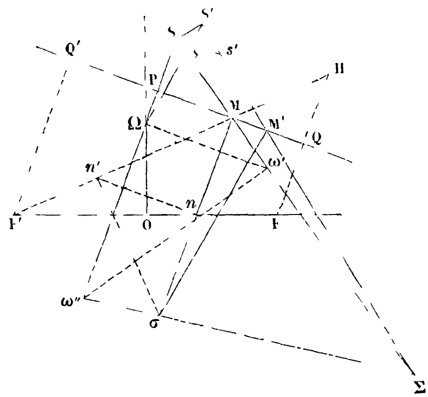
Remarque. — Dans le cas où le plan sécant serait bitangent au tore, le point Ω se confondrait avec O et les longueurs OS, OS′ seraient respectivement égales à F′Q′ et FQ. Les points F′, S′, H sont en ligne droite, ainsi que leurs analogues. Par conséquent la normale SM passe par le foyer F, et la normale S′M par le foyer F′, ce qui fournit une démonstration du théorème de M. Yvon Villarceau.

Rayon de courbure. — On sait que, pour obtenir le centre de courbure σ de l'ellipse au point M, il suffit de :

1° Élever nn' perpendiculaire à la normale par le pied n de celle-ci sur l'axe transverse (*fig.* 3);

2° Mener par le point n' où cette perpendiculaire

Fig. 3.



coupe le rayon vecteur F'M une perpendiculaire $n'\sigma$ à ce rayon vecteur;

3° L'intersection de cette dernière avec la normale est le centre σ de courbure.

Ce point déterminé, par la trace Ω de l'axe du tore sur le plan sécant élevons $\Omega\,\omega'$ perpendiculaire au rayon polaire ΩS de la courbe d'intersection (parallèle à la normale Mn au point correspondant de l'ellipse qui définit la normale SM). Du point ω', où cette perpendiculaire rencontre la normale SMω' à la courbe d'intersection, élevons à cette normale une perpendiculaire $\omega'\,\omega''$ qui vient couper en ω'' le rayon polaire.

La droite $\omega''\sigma$ qui joint le point ω'' au centre de courbure de l'ellipse déterminera le centre de courbure Σ de la courbe d'intersection par sa rencontre avec la normale SM.

En effet, soient S' et M' les points correspondants de la courbe et de l'ellipse infiniment voisins de S et M. Le centre de courbure cherché Σ sera l'intersection des deux normales SM et $S'M'$ infiniment voisines. Or les droites $\Omega S'$ et $\sigma M'$ étant parallèles, comme toutes les deux perpendiculaires à la tangente à l'ellipse au point M', les angles infiniment petits $S\Omega S'$ et $M\sigma M'$ sont égaux. Donc, s étant l'intersection de $\Omega S'$ avec la perpendiculaire Sss' à ΩS, c'est-à-dire la parallèle à MM', on a l'égalité

$$\frac{Ss}{MM'} = \frac{\Omega S}{\sigma M}.$$

De plus, si nous désignons par s' l'intersection de cette même parallèle avec la normale voisine qui est perpendiculaire à SS', dans le triangle infinitésimal $Ss'S'$ dont tous les angles sont finis, la longueur Ss est la projection de SS' qui est elle-même la projection de Ss'. La figure formée par les quatre points S, s, S', s' est donc semblable à celle que nous avons construite avec les points $S, \Omega, \omega', \omega''$ qui leur correspondent, puisque l'angle $\Omega S \omega'$ est égal à sSs'. En conséquence,

$$\frac{Ss'}{Ss} = \frac{S\omega''}{S\Omega},$$

d'où

$$\frac{Ss'}{MM'} = \frac{S\omega''}{M\sigma}.$$

Or on a

$$\frac{S\Sigma}{M\Sigma} = \frac{Ss'}{MM'}.$$

Donc

$$\frac{S\Sigma}{M\Sigma} = \frac{S\omega''}{M\sigma}.$$

Ce qui, en vertu du parallélisme des droites $S\omega''$ et $M\sigma$, justifie la construction indiquée ci-dessus du centre de courbure Σ.