NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WALECKI

Équation en S de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés [fin]

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 556-560

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__556_1>

ÉQUATION EN S DE DEGRÉ m ET DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE EN CARRÉS

[FIN (1)];

PAR M. WALECKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

1. Soit $f(x, y, \ldots, z)$ une fonction homogène, réelle, du second degré, des m variables $x, y, \ldots, z$.

---

(1) Même Tome, p. 401.

Par la substitution

$$(1)\quad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \ldots + \alpha_m z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \ldots + \beta_m z', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \ldots + \gamma_m z', \end{cases}$$

il vient identiquement

$$(2)\quad f(x, y, \ldots, z) = A x'^2 + 2 L x' y' + B y'^2 + \ldots + C z'^2.$$

Je dis que l'on a

$$(3)\qquad A = \alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \ldots + \gamma_1 f'_{\gamma_1},$$

$$(4)\qquad L = \alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \ldots + \gamma_2 f'_{\gamma_1},$$

où les f' désignent les demi-dérivées de f.

En effet, pour isoler A dans le second membre de (2), il suffit de prendre la demi-dérivée du second membre par rapport à x', puis d'y faire x' égal à l'unité, les autres variables y', ..., z' nulles.

J'effectue les mêmes opérations sur le premier membre, regardé comme fonction composée, et j'obtiens l'égalité (3).

De même j'aurai (4) en égalant les demi-dérivées des deux membres de (2), prises par rapport à y', et où je fais ensuite x' égal à l'unité, les autres variables nulles.

On peut remarquer que le second membre de (4) ne change pas par l'échange des indices 1 et 2.

2. Je suppose maintenant que la substitution (1) réduise $f(x, y, \ldots, z)$ à la forme canonique

$$A x'^2 + B y'^2 + \ldots + C z'^2,$$

et que cette substitution soit orthogonale, c'est-à-dire réduise $x^2 + y^2 + \ldots + z^2$ à $x'^2 + y'^2 + \ldots + z'^2$.

Par cette substitution, on aura, quel que soit S, l'identité

$$(5)\left\{\begin{aligned} &f(x, y, \ldots, z) - S(x^2 + y^2 + \ldots + z^2) \\ &\quad = (A - S)x'^2 + (B - S)y'^2 + \ldots + (C - S)z'^2, \end{aligned}\right.$$

où je regarde maintenant $x', y', \ldots, z'$ comme des fonctions indépendantes de $x, y, \ldots, z$, définies par la substitution inverse de (1).

Si aucun des coefficients $A - S$, $B - S$, $\ldots$, $C - S$ n'est nul, le premier membre de (5) est décomposable en m carrés indépendants, son discriminant est différent de o; si l'un de ces coefficients est nul, le discriminant est nul; d'ailleurs ce discriminant est le premier membre de l'équation en S pour $f(x, y, \ldots, z)$.

Donc l'équation en S admet pour seules racines les coefficients de la forme canonique obtenue par une substitution orthogonale, si la réduction est possible.

De plus, les dérivées partielles du premier membre de (5), quand on remplace S par A, par exemple, admettent des solutions non nulles : celles qui annulent $y', \ldots, z'$ et non x'. Si je prends x' égal à 1, les valeurs correspondantes des variables $x, y, \ldots, z$ sont, en vertu de (1), $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_1$: donc on a

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} &f'_{\alpha_1} - A\alpha_1 = 0, \\ &f'_{\beta_1} - A\beta_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &f'_{\gamma_1} - A\gamma_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc enfin, si la réduction est possible, le coefficient A du carré x'^2 dans la forme réduite est une racine de l'équation en S; les coefficients de x' dans la substitution (1) sont un système de solutions non nulles des équations (6).

3. Il faut voir maintenant si les coefficients ainsi

définis déterminent effectivement une substitution orthogonale et réduisent la fonction.

Je suppose d'abord que toutes les racines de l'équation en S soient distinctes; à l'une S_1 correspond un système de solutions en $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_1$ que je détermine par la condition

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \ldots + \gamma_1^2 = 1;$$

à une autre S_2 correspondra un second système α_2, $\beta_2, \ldots, \gamma_2$. Je dis que l'on a

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \ldots + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

En effet, si j'ajoute membre à membre les équations (6) après multiplication par $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \gamma_2$, et en y mettant S_1 à la place de A il reste

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \ldots + \gamma_2 f'_{\gamma_1} = S_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \ldots + \gamma_1\gamma_2);$$

on aurait de même l'égalité qui s'en déduit par l'échange des indices 1 et 2.

Comme l'échange des indices ne change pas le premier membre et que S_1 est différent de S_2, il faut que l'on ait

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \ldots + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \ldots + \gamma_2 f'_{\gamma_1} = 0.$$

La première et les analogues montrent que la substitution est orthogonale.

La seconde et les analogues montrent que cette substitution annule les coefficients des rectangles et donne à la fonction la forme canonique.

Enfin, on vérifie, en ajoutant membre à membre les égalités (6) après multiplication par $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_1$ et en y remplaçant A par la racine S_1 de l'équation en S,

$$\alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \ldots + \gamma_1 f'_{\gamma_1} = S_1,$$

qui exprime que le coefficient du carré x'^2 est bien la racine S_1 qui a donné les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_1$.

4. Je suppose enfin que l'équation en S ait des racines multiples. Au lieu que la substitution orthogonale, propre à la réduction, soit déterminée d'une façon unique, elle pourra être choisie de plusieurs manières.

A chaque racine simple correspond une colonne de coefficients de la substitution (1), comme dans le cas précédent.

A une racine multiple en correspondront plusieurs : pour S racine multiple d'ordre p de l'équation en S, les équations (6), où l'on remplace A par S, se réduisent à $m-p$ distinctes. Je choisis arbitrairement un premier système de solutions vérifiant $\alpha_1^2+\beta_1^2+\ldots+\gamma_1^2=1$.

Puis, j'en choisis un second en associant aux mêmes équations la condition

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\ldots+\gamma_1\gamma_2=0,$$

et ainsi de suite, de façon à obtenir des colonnes de coefficients, qui, par l'adjonction de ces conditions, satisfont entre elles et avec les autres à la condition d'orthogonalité.

Parmi les coefficients qui répondent à cette racine multiple d'ordre p, on en peut choisir arbitrairement un nombre donné par

$$(p-1)+(p-2)+\ldots+1=\frac{p(p-1)}{2}.$$

Quel que soit le choix fait, moyennant ces conditions, la forme réduite sera

$$S_1x'^2+S_2y'^2+\ldots+S_mz'^2,$$

$S_1, S_2, \ldots, S_m$ étant les racines de l'équation en S, et chacune d'elles étant répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité.