CH. BIEHLER

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 529-542

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__529_0>

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. CH. BIEHLER.

I. Considérons deux équations

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$\varphi(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

et supposons que m soit supérieur à p.

Soient de plus

$$f_\mu = A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu,$$
$$\varphi_\mu = B_0 x^\mu + B_1 x^{\mu-1} + \ldots + B_\mu.$$

Formons le système des équations

$$\begin{aligned}
f_0 \varphi(x) &= 0,\\
f_1 \varphi(x) &= 0,\\
\ldots\ldots&\ldots,\\
f_{m-p-1} \varphi(x) &= 0,\\
f_{m-p} \varphi(x) - \varphi_0 f(x) &= 0,\\
f_{m-p+1} \varphi(x) - \varphi_1 f(x) &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
f_{m-1} \varphi(x) - \varphi_{p-1} f(x) &= 0,
\end{aligned}$$

et désignons par Δ le déterminant du système de ces équations, considérées comme linéaires et homogènes entre les quantités $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^1, x^0$; le déterminant Δ sera symétrique par rapport à la diagonale principale. Désignons en outre par Δ_1 le déterminant du système des équations

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= 0,\\
x\varphi(x) &= 0,\\
\ldots\ldots&\ldots,\\
x^{m-p-1}\varphi(x) &= 0,
\end{aligned}$$

et

$$f_{m-p}\varphi(x) - \varphi_0 f(x) = 0,$$
$$f_{m-p+1}\varphi(x) - \varphi_1 f(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{p-1} f(x) = 0,$$

considérées comme linéaires et homogènes en x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, x^0.

Il est aisé de voir que l'on a entre Δ et Δ_1 la relation très simple

$$\Delta = \Delta_1 \times A_0^{m-p}.$$

Il nous sera avantageux, dans ce qui suit, de considérer le déterminant Δ qui est symétrique, de préférence au déterminant Δ_1 qui ne jouit pas de la même propriété. Cette substitution de Δ à Δ_1 ne présente aucun inconvénient si, comme nous le supposons, A_0 est une quantité différente de zéro. Posons

$$f_0\varphi(x) = G_{1,1}x^{m-1} + G_{1,2}x^{m-2} + \ldots + G_{1,m},$$
$$f_1\varphi(x) = G_{2,1}x^{m-1} + G_{2m,2}x^{m-2} + \ldots + G_{2,m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{m-p-1}\varphi(x) = G_{m-p,1}x^{m-1} + \ldots + G_{m-p,m},$$
$$f_{m-p}\varphi(x) - \varphi_0 f(x) = G_{m-p+1,1}x^{m-1} + \ldots + G_{m-p+1,m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{p-1}f(x) = G_{m,1}x^{m-1} + \ldots + G_{m,m}:$$

on aura alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m-p,1} & \ldots & \ldots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & \ldots & \ldots & G_{m-p+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,1} & \ldots & \ldots & G_{m,m} \end{vmatrix},$$

et il est clair que $\Delta = 0$ est une condition *nécessaire* pour que les deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ aient une racine commune. Je dis que cette condition $\Delta = 0$ est aussi *dans tous les cas suffisante*.

I.

2. Supposons en effet que $\Delta = 0$ et que les déterminants d'ordre $m - 1$, mineurs de Δ, ne soient pas tous nuls; nous allons démontrer que dans ce cas les équations proposées ont une seule racine commune.

On pourra en effet écrire l'identité

$$\Delta x^{m-\mu} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,\mu-1} f_0 \varphi(x) & G_{1,\mu+1} & \ldots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,\mu-1} f_1 \varphi(x) & G_{2,\mu+1} & \ldots & G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m-p,1} & \ldots & \ldots & G_{m-p,\mu-1} f_{m-p-1} \varphi(x) & G_{m-p,\mu+1} & \ldots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & \ldots & \ldots & G_{m-p+1,\mu-1} f_{m-p} \varphi(x) - \varphi_0 f(x) & G_{m-p+1,\mu+1} & \ldots & G_{m-p+1,m} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,1} & \ldots & \ldots & G_{m,\mu-1} f_{m-1} \varphi(x) - \varphi x - 1 f(x) & G_{m,\mu+1} & \ldots & G_{m,m} \end{vmatrix},$$

ou bien

$$(a) \qquad \Delta x^{m-\mu} = U\varphi(x) - V f(x),$$

en posant

$$U = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,\mu-1} & f_0 & G_{1,\mu+1} & \ldots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,\mu-1} & f_1 & G_{2,\mu+1} & \ldots & G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m-p,1} & G_{m-p,2} & \ldots & G_{m-p,\mu-1} & f_{m-p-1} & G_{m-p,\mu+1} & \ldots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \ldots & G_{m-p+1,\mu-1} & f_{m-p} & G_{m-p+1,\mu+1} & \ldots & G_{m-p+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,\mu-1} & f_{m-1} & G_{m,\mu+1} & \ldots & G_{m,m} \end{vmatrix},$$

et

$$V = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,\mu-1} & 0 & G_{1,\mu+1} & \ldots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,\mu-1} & 0 & G_{2,\mu+1} & \ldots & G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m-p,1} & G_{m-p,2} & \ldots & G_{m-p,\mu-1} & 0 & G_{m-p,\mu+1} & \ldots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \ldots & G_{m-p+1,\mu-1} & \varphi_0 & G_{m-p+1,\mu+1} & \ldots & G_{m-p+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,\mu-1} & \varphi_{p-1} & G_{m,\mu+1} & \ldots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Cette identité, dans l'hypothèse de $\Delta = 0$, devient

$$0 = U\varphi(x) - Vf(x);$$

elle montre donc que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune, à moins que les deux fonctions U et V ne soient identiquement nulles quel que soit μ, auquel cas on ne peut rien en conclure.

3. Nous allons montrer que, dans l'hypothèse faite, que les déterminants d'ordre $m-1$, mineurs de Δ, ne sont pas tous nuls, les fonctions U et V ne peuvent pas être identiquement nulles, quel que soit μ.

Désignons en effet par $\Delta(\mu, \nu)$ le déterminant d'ordre $m-1$ obtenu en supprimant dans la figuration de Δ la colonne d'ordre μ et la rangée d'ordre ν.

Les fonctions U et V pourront s'écrire

$$\pm\, \mathrm{U} = f_{m-1} \times \Delta(\mu, m) - f_{m-2} \times \Delta(\mu, m-1) + \ldots \pm f_0 \times \Delta(\mu, 1),$$

$$\pm\, \mathrm{V} = \varphi_{p-1} \times \Delta(\mu, m) - \varphi_{p-2} \times \Delta(\mu, m-1) + \ldots \pm \varphi_0 \Delta(\mu, m-p+1)$$

ou bien, en ordonnant ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$\pm\, \mathrm{U} = \mathrm{A}_0 \Delta(\mu, m) x^{m-1} + \left.\begin{matrix} \mathrm{A}_1 \Delta(\mu, m) \\ -\mathrm{A}_0 \Delta(\mu, m-1) \end{matrix}\right| x^{m-2} + \left.\begin{matrix} \mathrm{A}_2 \Delta(\mu, m) \\ -\mathrm{A}_1 \Delta(\mu, m-1) \\ +\mathrm{A}_0 \Delta(\mu, m-2) \end{matrix}\right| x^{m-3} + \ldots$$

$$\pm\, \mathrm{V} = \mathrm{B}_0 \Delta(\mu, m) x^{p-1} + \left.\begin{matrix} \mathrm{B}_1 \Delta(\mu, m) \\ -\mathrm{B}_0 \Delta(\mu, m-1) \end{matrix}\right| x^{p-2} + \left.\begin{matrix} \mathrm{B}_2 \Delta(\mu, m) \\ -\mathrm{B}_1 \Delta(\mu, m-1) \\ +\mathrm{B}_0 \Delta(\mu, m-2) \end{matrix}\right| x^{p-3} + \ldots,$$

Si donc U et V étaient identiquement nuls, on aurait

$$\Delta(\mu, m) = 0, \quad \Delta(\mu, m-1) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta(\mu, 1) = 0,$$

et par suite

$$\Delta(\mu, \nu) = 0,$$

pour toutes les valeurs de μ et de ν, depuis 1 jusqu'à m, ce qui est contraire à l'hypothèse; on peut donc conclure de ce qui précède :

Si $\Delta = 0$ et si les déterminants d'ordre $m-1$, mineurs de Δ, ne sont pas tous nuls, les équations proposées admettent au moins une racine commune.

4. Nous allons démontrer en outre que, si $\Delta = 0$ et si les déterminants $\Delta(\mu, \nu)$ ne sont pas tous nuls, $\Delta(\mu, m)$ est nécessairement différent de zéro, quel que soit μ, et par suite les fonctions U et V formées plus haut sont respectivement de degré $m-1$ et $p-1$.

Considérons en effet le déterminant

$$
\Delta(\mu_1,\nu_1)=\begin{vmatrix}
G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,\mu_1-1} & G_{1,\mu_1+1} & \ldots & G_{1,m} \\
G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,\mu_1-1} & G_{2,\mu_1+1} & \ldots & G_{2,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{\nu_1-1,1} & G_{\nu_1-1,2} & \ldots & G_{\nu_1-1,\mu_1-1} & G_{\nu_1-1,\mu_1+1} & \ldots & G_{\nu_1-1,m} \\
G_{\nu_1+1,1} & G_{\nu_1+1,2} & \ldots & G_{\nu_1+1,\mu_1-1} & G_{\nu_1+1,\mu_1+1} & \ldots & G_{\nu_1+1,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,\mu_1-1} & G_{m,\mu_1+1} & \ldots & G_{m,m}
\end{vmatrix}.
$$

On en tire l'identit é

$$
x^{m-\mu_2}\Delta(\mu_1,\nu_1)
$$

$$
=\begin{vmatrix}
G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,\mu_1-1} & G_{1,\mu_1+1} & \ldots & G_{1,\mu_2-1} & f_0\varphi(x) & -G_{1,\mu_1}x^{m-\mu_1} & G_{1,\mu_2+1} & \ldots & G_{1,m} \\
G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,\mu_1-1} & G_{2,\mu_1+1} & \ldots & G_{2,\mu_2-1} & f_1\varphi(x) & -G_{2,\mu_1}x^{m-\mu_1} & G_{2,\mu_2+1} & \ldots & G_{2,m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{\nu_1-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{\nu_1+1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,\mu_1-1} & G_{m,\mu_1+1} & \ldots & G_{m,\mu_2-1} & f_{m-1}\varphi(x)-\varphi_{p-1}f(x) & -G_{m,\mu_1}x^{m-\mu_1} & G_{m,\mu_2+1} & \ldots & G_{m,m}
\end{vmatrix},
$$

que l'on peut écrire

$$(b)\quad x^{m-\mu_2}\Delta(\mu_1, \nu_1) \pm x^{m-\mu_1}\Delta(\mu_2, \nu_1) = U_1\varphi(x)V_1 f(x);$$

les fonctions U_1 et V_1, qui sont en général de degrés $m-1$ et $p-1$, ne sont plus que de degrés $m-2$ et $p-2$ lorsque $\nu_1 = m$.

Si $\Delta(\mu, m)$ était égal à zéro, pour une valeur particulière donnée à μ, l'égalité précédente, pour $\mu_1 = \mu$, $\nu_1 = m$, prendrait la forme

$$\pm x^{m-\mu}\Delta(\mu_2, m) = U_1\varphi(x) - V_1 f(x),$$

et comme, d'après ce que nous avons démontré, $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune, il s'ensuit que l'on a

$$\Delta(\mu_2, m) = 0,$$

quel que soit μ_2; par suite, si un seul des déterminants $\Delta(\mu, m)$ était nul, tous les déterminants obtenus, en faisant varier μ depuis 1 jusqu'à m dans $\Delta(\mu, m)$, seraient aussi nuls.

Mais, le déterminant Δ étant symétrique, on a

$$\Delta(\mu, \nu) = \Delta(\nu, \mu);$$

par suite, l'identité (b), pour $\mu_2 = m$, se réduit à

$$\pm\Delta(\mu_1, \nu_1) = U_1\varphi(x) - V_1 f(x),$$

et, comme les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ admettent au moins une racine commune, on aurait

$$\Delta(\mu_1, \nu_1) = 0,$$

quels que soient μ_1 et ν_1, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc :

Si $\Delta = 0$, et si les déterminants $\Delta(\mu, \nu)$ ne sont pas tous nuls, on a nécessairement $\Delta(\mu, m) \gtrless 0$, quel que soit μ, et, par suite, les fonctions U *et* V *sont respectivement de degrés $m-1$ et $p-1$.*

5. Nous allons démontrer enfin que si $\Delta = 0$, et si les déterminants $\Delta(\mu, \nu)$ ne sont pas tous nuls, les équations proposées n'admettent qu'une seule racine commune.

Faisons, en effet, $\nu_1 = m$, $\mu_1 = m$, $\mu_2 = m - 1$ dans l'identité (b), il viendra

$$x\,\Delta(m, m) + \Delta(m-1, m) = U_1\,\varphi(x) - V_1 f(x).$$

Les quantités $\Delta(m, m)$, $\Delta(m - 1, m)$ sont, d'après ce que nous avons démontré, toutes les deux différentes de zéro; de plus, les fonctions U_1 et V_1, qui sont dans ce cas de degré $m - 2$ au plus, ne peuvent être identiquement nulles, puisque le premier membre ne l'est pas; par suite, si $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ admettaient deux racines communes ou plus de deux, ces racines devraient satisfaire à l'équation du premier degré

$$x\,\Delta(m, m) + \Delta(m-1, m) = 0,$$

et, par suite, cette équation devrait se réduire à une identité, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. Donc :

Si $\Delta = 0$ et si les déterminants $\Delta(\mu, \nu)$ ne sont pas tous nuls, les équations proposées n'admettent qu'une seule racine commune, et cette racine est fournie par l'équation

$$x\,\Delta(m, m) + \Delta(m-1, m) = 0,$$

ou, comme il est facile de s'en assurer, par l'une des équations

$$x\,\Delta(\mu, m) + \Delta(\mu, m-1) = 0,$$

obtenues en donnant à μ les valeurs $1, 2, \ldots, m$.

L'identité (b) donne aussi, pour $\mu_2 = m$, $\mu_1 = 1 . 2, \ldots, m - 1$, une série d'expressions pour les puissances de la racine commune, depuis la puissance $m - 1$, jusqu'à la première puissance.

II.

6. Supposons maintenant que $\Delta = 0$, que les déterminants $\Delta(\mu,\nu)$ soient tous nuls, et que les déterminants d'ordre $m-2$, mineurs de Δ, ne soient pas tous nuls.

L'identité (b) se réduit à

$$0 = U_1 \varphi(x) - V_1 f(x).$$

Elle montre que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune, à moins que les fonctions U_1 et V_1 ne soient identiquement nulles. Mais s'il en était ainsi, on aurait

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, m) = 0, \quad \Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, m-1) = 0,$$
$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, 1) = 0,$$

et par suite

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

en désignant d'une manière générale par $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$ le déterminant d'ordre $m-2$, mineur de Δ, obtenu en supprimant dans la figuration de Δ les colonnes d'ordre μ_1 et μ_2 et les rangées d'ordre ν_1 et ν_2.

Or nous avons supposé que les déterminants de la forme $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$ ne sont pas tous nuls; par suite, les fonctions U_1 et V_1 ne sont pas identiquement nulles.

7. Nous allons démontrer, de plus, que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont, dans les hypothèses faites ci-dessus, au moins deux racines communes.

En effet, pour $\nu_1 = m$, les deux fonctions U_1 et V_1 de l'identité (b) s'abaissent respectivement aux degrés $m-2$ et $p-2$; par suite, si ces fonctions ne sont pas identiquement nulles pour $\nu_1 = m$, le théorème d'Euler nous montre que les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$

admettent au moins deux racines communes. Il est aisé de démontrer que, dans ce cas, U_1 et V_1 ne sont pas identiquement nulles quels que soient les nombres μ_1, μ_2 ; il faudrait pour cela que l'on eût

$$\Delta(\mu_1, \mu_2 ; m, \nu_2) = 0,$$

comme il est aisé de le voir en développant U_1 et V_1.

Mais on peut établir, comme nous l'avons fait pour l'identité (b), une identité nouvelle, dans le premier membre de laquelle figurent trois déterminants d'ordre $m - 2$, mineurs de Δ, savoir :

$$(c) \left\{ \begin{aligned} & x^{m-\mu_3} \Delta(\mu_1, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) \pm x^{m-\mu_2} \Delta(\mu_3, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) \\ & \qquad \pm x^{m-\mu_1} \Delta(\mu_3, \mu_1 ; \nu_1, \nu_2) \\ & \qquad = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait dans cette identité $\mu_3 = m$, il viendra

$$\begin{aligned} & \Delta(\mu_1, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) \pm x^{m-\mu_2} \Delta(m, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) \\ & \qquad \pm x^{m-\mu_1} \Delta(m, \mu_1 ; \nu_1, \nu_2) = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$

Si l'on avait

$$\Delta(\mu_1, \mu_2 ; m, \nu_2) = 0,$$

on aurait aussi, à cause de la symétrie de Δ,

$$\Delta(m, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) = 0, \qquad \Delta(m, \mu_1 ; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

et par suite l'identité (c) prendrait la forme

$$\Delta(\mu_1, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x),$$

et comme, d'après ce qui précède, $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune, on aurait

$$\Delta(\mu_1, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les fonctions U_1 et V_1 ne sont donc pas identiquement nulles, quand $\nu_1 = m$ et quels que soient μ_1 et μ_2 ; par suite, les équations proposées admettent au moins deux racines communes; on a donc cette proposition :

Si $\Delta = 0$, *et si tous les mineurs* $\Delta(\mu, \nu)$ *sont nuls, sans que les déterminants d'ordre* $m - 2$, *mineurs de* Δ, *le soient tous, les deux équations proposées admettent au moins deux racines communes.*

8. Nous allons démontrer maintenant que, dans les hypothèses faites précédemment, les équations proposées n'admettent que deux racines communes.

Faisons en effet, dans l'identité (c),

$$\mu_3 = m, \quad \mu_2 = m - 1, \quad \mu_1 = m - 2,$$

on aura

$$\begin{aligned} \Delta(m-2, m-1; \nu_1, \nu_2) &\pm x\Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) \\ &\pm x^2\Delta(m, m-2; \nu_1, \nu_2) \\ &= U_2\varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$

Si les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ admettaient plus de deux racines communes, l'équation du second degré

$$\begin{aligned} \Delta(m-2, m-1; \nu_1, \nu_2) &\pm x\Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) \\ &\pm x^2\Delta(m, m-2; \nu_1, \nu_2) = 0 \end{aligned}$$

se réduirait à une identité; par suite, on aurait

$$\begin{aligned} \Delta(m-2, m-1; \nu_1, \nu_2) &= 0, \\ \Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) &= 0, \\ \Delta(m, m-2; \nu_1, \nu_2) &= 0. \end{aligned}$$

En faisant dans (c)

$$\mu_1 = m, \quad \mu_2 = m - 1,$$

cette identité devient

$$\begin{aligned} x^{m-\mu_3}\Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) &\pm x\Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) \\ \pm \Delta(\mu_3, m-1; \nu_1, \nu_2) &= U_2\varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$

et comme

$$\Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

$$\pm x\Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2)$$
$$\pm \Delta(\mu_3, m-1; \nu_1, \nu_2) = U_2\varphi(x) - V_2 f(x).$$

L'équation du premier degré

$$\pm x\Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) \pm \Delta(\mu_3, m-1; \nu_1 \nu_2) = 0$$

devant admettre au moins deux racines, on a

$$\Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) = 0,$$
$$\Delta(\mu_3, m-1; \nu_1, \nu_2) = 0.$$

Or nous avons vu que, dans ce cas, on a

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; on a donc cette nouvelle proposition :

Si $\Delta = 0$ *et si tous les mineurs* $\Delta(\mu, \nu)$ *sont nuls, sans que les mineurs du second ordre* $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$ *le soient tous, les équations proposées admettent deux racines communes et n'en admettent que deux.*

Les racines sont données par l'une des équations du second degré

$$\Delta(m-2, m-1; \nu_1, \nu_2) \pm x\Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2)$$
$$\pm x^2\Delta(m, m-2; \nu_1, \nu_2) = 0.$$

9. On peut faire voir de plus que, si $\Delta = 0$ et si tous les mineurs $\Delta(\mu, \nu)$ sont nuls, tous les mineurs $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$ sont aussi nuls, du moment que le mineur $\Delta(m, m-1; m, m-1)$ est nul.

En effet, faisons, dans l'identité (c),

$$\mu_1 = m, \quad \mu_2 = m-1, \quad \nu_1 = m, \quad \nu_2 = m-1,$$

elle deviendra

$$x^{m-\mu_3}\Delta(m, m-1; m, m-1) \pm x\Delta(\mu_3, m-1; m, m-1)$$
$$\pm \Delta(\mu_3, m; m, m-1) = U_2\varphi(x) - V_2 f(x).$$

Dans l'hypothèse de

$$\Delta(m, m-1; m, m-1) = 0,$$

cette identité devient

$$\pm x\Delta(\mu_3, m-1; m, m-1) \pm \Delta(\mu_3, m; m, m-1)$$
$$= U_2\varphi(x) - V_2 f(x).$$

Comme $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont au moins deux racines communes, dans les hypothèses faites, on aura

$$\Delta(\mu_3, m-1; m, m-1) = 0, \quad \Delta(\mu_3, m; m, m-1) = 0.$$

Faisons maintenant, dans (c), $\mu_1 = m$, $\mu_2 = m-1$, $\nu_1 = m$, on en déduira

$$\Delta(\mu_3, m-1; m, \nu_2) = 0, \quad \Delta(\mu_3, m, \nu_2) = 0,$$

puis, pour $\mu_3 = m$, $\nu_1 = m$, on en tirera

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; m, \nu_2) = 0;$$

et enfin, en faisant, dans (c), $\mu_3 = m$, on en déduit

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

ce qui montre que, dans le cas où

$$\Delta = 0, \quad \Delta(\mu, \nu) = 0, \quad \Delta(m, m-1; m, m-1) = 0,$$

tous les déterminants $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$ sont nuls.

Mais nous avons démontré que, si $\Delta = 0$, $\Delta(m, m) = 0$, on a $\Delta(\mu, \nu) = 0$; par suite, si $\Delta = 0$, $\Delta(m, m) = 0$, $\Delta(m, m-1; m, m-1) = 0$, tous les déterminants $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$ sont nuls.

10. En continuant de la même manière que précédemment, on démontrerait que, si $\Delta = 0$, $\Delta(\mu, \nu) = 0$, $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0$, sans que les déterminants d'ordre $m - 3$, mineurs de Δ, soient tous nuls, les équations proposées admettent trois racines communes et n'en admettent pas plus de trois, et ainsi de suite.

On peut donc énoncer cette proposition générale :

Si $\Delta = 0$, *et si les déterminants d'ordre* $m - 1$, $m - 2, \ldots, m - p + 1$, *mineurs de* Δ, *sont tous nuls, sans que tous les déterminants d'ordre* $m - p$, *mineurs de* Δ, *soient nuls, les équations proposées admettent* p *racines communes et n'en admettent pas plus de* p.

Ou bien encore,

Si $\Delta = 0$, *et si les déterminants d'ordre* $m - 1$, $m - 2, \ldots, m - p + 1$, *mineurs de* Δ, *obtenus respectivement en supprimant dans* Δ *la dernière colonne et la dernière rangée, puis les deux dernières colonnes et les deux dernières rangées, etc., enfin les* $p - 1$ *dernières colonnes et les* $p - 1$ *dernières rangées sont nuls, et si le mineur d'ordre* $m - p$, *obtenu en supprimant dans* Δ *les* p *dernières colonnes et les* p *dernières rangées, est différent de zéro, les équations proposées admettent* p *racines communes et n'en admettent pas davantage.*