NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 522-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__522_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1412

(voir 3ᵉ série, t. I, p. 383);

PAR UN ANONYME.

Par le sommet B *d'un triangle* ABC, *on mène une parallèle à la base, la médiane, la bissectrice et la hauteur; du milieu* D *de la base on abaisse sur la bissectrice une perpendiculaire* DH, *qui rencontre en* E *et* F *la hauteur et la parallèle à la base : il s'agit de démontrer que* $DA^2 = DH \times EF$. (A. CAMBIER.)

Soient BG et BG' les bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle B ([1]). Les quatre points A, C, G, G' étant conjugués harmoniques, $DA^2 = DG \times DG'$, ou, parce que $DG' = BF$, comme parallèles comprises entre parallèles, $DA^2 = DG \times BF$. Mais les triangles rectangles semblables EBF, DHG donnent

$$\frac{DG}{EF} = \frac{DH}{BF} \quad \text{ou} \quad DG \times BF = DH \times EF;$$

donc

$$DA^2 = DH \times EF.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1414

(voir 3e série, t. I, p. 383)

PAR UN ANONYME.

Soient, dans deux plans rectangulaires, deux circonférences ayant respectivement pour diamètres deux segments conjugués harmoniques de l'intersection de ces plans ; si de deux points quelconques de l'une de ces circonférences on mène des droites à deux points quelconques de l'autre, on formera un quadrilatère, gauche (en général), dont deux côtés opposés ont le même produit que les deux autres côtés opposés.

(H. SCHRÖTER.)

Soient

P, P' les deux plans rectangulaires des circonférences ayant respectivement pour diamètres des segments conjugués harmoniques MN, M'N' de l'intersection

---

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

de ces plans; O, O′ les milieux de ces segments, centres des circonférences;

A, B deux points quelconques de la circonférence dont O est le centre et P le plan;

A′, B′ deux points quelconques de l'autre circonférence.

Il s'agit de démontrer que, dans le quadrilatère ABA′B′,
$$AA' \times BB' = AB' \times BA' \text{ [1]}.$$

La démonstration que nous allons donner s'appuie sur les propositions suivantes, qui sont généralement connues :

1° Si MN, M′N′ sont deux segments conjugués harmoniques d'une droite, et O, O′ les milieux de ces segments, on a
$$ON^2 = OM' \times ON',$$
$$O'M'^2 = O'M \times O'N,$$
$$OO'^2 = ON^2 + O'M'^2.$$

2° Les points de la circonférence qui a pour diamètre l'un des deux segments, MN par exemple, sont à des distances des extrémités M′, N′ de l'autre segment dans le rapport invariable
$$\frac{NM'}{NN'} = \frac{MM'}{MN'}.$$

Et comme, en faisant tourner le plan de la circonférence autour de son diamètre MN, les distances d'un point de cette circonférence à M′, N′ restent constamment les mêmes, il en résulte que la sphère dont O est le centre et ON le rayon est le lieu géométrique des points de l'espace dont les distances à M′ et N′ sont dans le rapport $\frac{NM'}{NN'}$.

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

3° Si, MN et M'N' étant deux segments d'une même droite, dont les milieux sont O, O', on a

$$ON^2 = OM' \times ON' \quad \text{ou} \quad O'M'^2 = O'M \times O'N,$$

ces deux segments seront conjugués harmoniques ([1]).

Cela admis, je mène dans le plan P, au point O', une perpendiculaire O'C à M'N', qui rencontre en C la droite AB prolongée, et du point C comme centre et avec CM' ou CN' pour rayon je décris une circonférence dans le plan P. Soient D et E les points d'intersection de cette circonférence et de la droite AB, les segments AB, DE seront conjugués harmoniques.

En effet, les triangles rectangles CO'M', CO'O donnent

$$CM'^2 = CO'^2 + O'M'^2, \quad CO^2 = CO'^2 + O'O^2,$$

d'où

$$CM'^2 = CO^2 + O'M'^2 - OO'^2 = CO^2 - ON^2,$$

puisque $OO'^2 = ON^2 + O'M'^2$ (1°).

L'égalité $CM'^2 = CO^2 - ON^2$ montre que la droite CM' est égale à la tangente menée du point C à la circonférence dont O est le centre et ON le rayon. Donc CM'^2, ou $CD^2 = CB \times CA$; et par conséquent (3°) les deux segments AB, DE sont conjugués harmoniques. Il s'ensuit (2°) que la sphère dont C est le centre et CD le rayon est le lieu géométrique des points de l'espace dont les distances aux points A et B sont dans le rapport $\frac{DA}{DB}$.

Or il est facile de reconnaître que cette sphère coupe le plan P' suivant la circonférence qui a M'N' pour diamètre; car la droite CO', étant perpendiculaire au plan P', tous les points de cette circonférence sont à une distance de C égale au rayon CM' de la sphère.

([1]) En supposant, toutefois, que les points M', N' soient situés d'un même côté du milieu O de MN.

On a donc

$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{DA}{DB} \quad \text{et} \quad \frac{B'A}{B'B} = \frac{DA}{DB},$$

d'où

$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{B'A}{B'B}, \quad AA' \times BB' = AB' \times BA'.$$

C. Q. F. D.

Question 1415

(voir 3e série, t. I, p. 383);

PAR M. H. B. D.,
Professeur de Mathématiques à Rome.

Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}},$$

α et β *étant des constantes données.* (S. Realis.)

En posant

$$(1) \qquad x^3 = (\alpha x + \beta)^2 (z^2 \pm 1)$$

et différentiant cette équation, on a

$$(2) \quad [3x^2 - 2\alpha(\alpha x + \beta)(z^2 \pm 1)]\,dx = 2(\alpha x + \beta)^2 z\,dz.$$

Éliminant $(z^2 \pm 1)$ entre les équations (1) et (2) et réduisant, nous avons

$$x^2(\alpha x + 3\beta)\,dx = 2(\alpha x + \beta)^3 z\,dz$$

ou

$$\frac{\alpha x + 3\beta}{x} dx = \frac{2(\alpha x + \beta)^3 z}{x^3} dz,$$

ou bien, d'après l'équation (1),

$$(3) \qquad \frac{\alpha x + 3\beta}{x} dx = \frac{2(\alpha x + \beta) z}{z^2 \pm 1} dz.$$

Mais de l'équation (1) on déduit

$$(4) \qquad z(\alpha x + \beta) = \sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}.$$

Donc

$$\frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \pm (\alpha x + \beta)^2}} = \frac{2\,dz}{z^2 \pm 1}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - (\alpha x + \beta)^2}} = 2 \operatorname{arc\,tang} z + C$$

et

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + (\alpha x + \beta)^2}} = \log \frac{z - 1}{z + 1} + C,$$

ou bien

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{z}{\sqrt{\pm 1}} \right) + C$$

z étant toujours égale à $\dfrac{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}}{\alpha x + \beta}$.

En général, on a

$$\int \frac{\alpha x + (n+1)\beta}{x} \frac{(\alpha x + \beta)^{\frac{n}{2} - 1} dx}{\sqrt{x^{n+1} \mp (\alpha x + \beta)^n}} = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{z}{\sqrt{\pm 1}} \right) + C,$$

z étant égale à $\sqrt{\dfrac{x^{n+1} \mp (\alpha x + \beta)^n}{(\alpha x + \beta)^n}}$.

Note. — La même question a été résolue par M. Charles Chabanel.