NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GAMBEY

Solution d'une question de mécanique proposée au concours d'agrégation en 1879

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 508-515

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__508_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1879;

(voir 2e série, t. XIX, p. 182);

PAR M. GAMBEY.

Un point pesant M, *assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution dont l'axe est vertical est attiré par un centre placé au sommet* S *du cône : l'attraction est proportionnelle à une fonction inconnue de la distance* MS :

1° *Trouver quelle doit être cette fonction pour que la trajectoire du point* M *soit plane.*

2° *Étudier, dans ces conditions, le mouvement de la projection du point* M *sur un plan horizontal.*

3° *Déterminer la réaction du cône, pour une position quelconque du point* M *sur sa trajectoire.*

Je suppose le point M sur la nappe inférieure du cône et je prends des axes rectangulaires se coupant au sommet, l'axe des z étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur.

Soient M_1 la projection du point M sur le plan des xy, et φ l'angle de SM_1 avec Sx, cet angle étant compté positivement de l'axe des x vers l'axe des y.

Je pose encore

$$OM = \rho, \quad OM_1 = r, \quad MOz = \theta,$$

d'où les relations

$$z = \rho \cos\theta, \quad r = \rho \sin\theta.$$

Le principe des forces vives donne immédiatement

$$(1) \qquad dv^2 = -2f(\rho)\,d\rho + 2g\,dz,$$

$f(\rho)$ étant une fonction inconnue de ρ.

Le principe des aires ayant lieu pour la projection du mouvement sur le plan des xy, on a encore

$$(2) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \lambda.$$

Pour que la trajectoire du point M soit plane, il faut et il suffit que sa projection sur le plan des xy soit une conique ayant le point S pour foyer.

En supposant que le plan de la trajectoire du point M soit perpendiculaire au plan des zx, ce qui est toujours permis, et qu'en outre le sens du mouvement soit celui qui fait croître l'angle φ, l'équation de la projection sur le plan des xy sera

$$(3) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Les paramètres p et e peuvent être supposés donnés ou déterminés en fonction des données initiales du mouvement.

La vitesse v du point M sur le cône s'exprime par

$$(4)\qquad v^2 = \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\varphi^2}{dt^2}.$$

Les relations (1), (2), (3) et (4) vont nous servir à déterminer la fonction $f(\rho)$.

D'abord l'équation (4) devient, si l'on tient compte de l'équation (2),

$$v^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{\lambda^2}{r^2}.$$

Mais de l'équation de la conique on déduit, en ayant encore égard à l'équation (2),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e\lambda \sin\varphi}{p}.$$

Donc

$$(5)\qquad v^2 = \frac{e^2\lambda^2}{p^2\sin^2\theta}\sin^2\varphi + \frac{\lambda^2}{r^2},$$

et

$$dv^2 = \frac{e^2\lambda^2}{p^2\sin^2\theta}\, d\sin^2\varphi - \frac{2\lambda^2}{r^3}dr.$$

Mais de l'équation (3) on déduit encore

$$d\sin^2\varphi = -\frac{2p}{e^2}\frac{dr}{r^2} + \frac{2p^2}{e^2}\frac{dr}{r^3}.$$

Par suite,

$$dv^2 = -\frac{2\lambda^2}{p\sin^2\theta}\frac{dr}{r^2} + 2\lambda^2\cot^2\theta\frac{dr}{r^3},$$

ou bien

$$dv^2 = -\frac{2\lambda^2}{p\sin^3\theta}\frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{2\lambda^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\frac{d\rho}{\rho^3}.$$

En comparant cette équation avec l'équation (1), on en déduit

$$f(\rho) = g\cos\theta + \frac{\lambda^2}{p\sin^3\theta}\frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\frac{1}{\rho^3}.$$

Il en résulte

$$v^2 = \frac{2\lambda^2}{p\sin^3\theta}\frac{1}{\rho} - \frac{\lambda^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\frac{1}{\rho^2} + \mu$$
$$= \frac{2\lambda^2}{p\sin^2\theta}\frac{1}{r} - \lambda^2\cot^2\theta\frac{1}{r^2} + \mu,$$

μ étant une constante.

Déterminons maintenant les constantes λ et μ. Soient v_0 la vitesse initiale du mobile M sur le cône, et r_0 la valeur initiale de r; nous aurons d'abord

$$v_0^2 = \frac{2\lambda^2}{p\sin^2\theta}\frac{1}{r_0} - \lambda^2\cot^2\theta\frac{1}{r_0^2} + \mu,$$

et, comme la valeur (5) de v^2 devient, pour $\varphi = \varphi_0$, valeur initiale de φ, égale à $\frac{\lambda^2 e^2}{p^2\sin^2\theta}\sin^2\varphi_0 + \frac{\lambda^2}{r_0^2}$, il en résulte cette autre relation

$$v_0^2 = \frac{\lambda^2}{r_0^2} + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2\sin^2\theta}\sin^2\varphi_0.$$

Éliminant entre elles le rayon vecteur initial par la relation $r_0 = \frac{p}{1 + e\cos\varphi_0}$ et la vitesse v_0^2, il vient

$$p^2\mu\sin^2\theta = \lambda^2(e^2 - 1),$$

équation qui peut remplacer l'une des deux précédentes.

On voit que, pour $e < 1, = 1, > 1$, on a

$$\mu < 0, \quad = 0, \quad > 0$$

et qu'on a

$$\lambda^2 = v_0^2 r_0^2, \quad \mu = v_0^2 r_0^2 \frac{e^2 - 1}{p^2\sin^2\theta}.$$

Étudions maintenant le mouvement du point M_1 sur le plan des xy. Soit w la vitesse de ce point; nous aurons

$$w^2 = \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2}$$
$$= \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2}\sin^2\varphi = \frac{\lambda^2}{p^2}(1 + e\cos\varphi)^2 + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2}\sin^2\varphi,$$

c'est-à-dire

$$w^2 = \frac{\lambda^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos\varphi).$$

Comme nous avons

$$v^2 = \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2 \sin^2\theta}\sin^2\varphi,$$

il en résulte

$$v^2 - w^2 = \frac{e^2\lambda^2\cot^2\theta}{p^2}\sin^2\varphi.$$

Donc la vitesse w est toujours plus petite que v, excepté pour $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$; alors $w = v$.

En supposant $e \lesseqgtr 1$, w ne peut s'annuler; donc, sur l'ellipse ou sur l'hyperbole, le mouvement aura toujours lieu dans le même sens.

Mais sur la parabole on aura $w = 0$ pour $\varphi = \pi$. Comme le rayon vecteur sera alors infini, on en conclut que sur la parabole le mouvement aura aussi toujours lieu dans le même sens.

Le maximum de w^2 est donné par $\varphi = 0$, et son minimum par $\varphi = \pi$.

Cherchons à exprimer φ en fonction du temps. Nous avons

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \lambda;$$

mais de

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

nous déduirons

$$r^2 = \frac{p^2}{(1 + e\cos\varphi)^2},$$

et, en multipliant par $\frac{d\varphi}{dt}$,

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p^2\frac{d\varphi}{dt}}{(1+e\cos\varphi)^2} = \lambda,$$

d'où

$$\frac{p^2\,d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \lambda\,dt.$$

Pour intégrer, il faudrait considérer les trois cas de $e < 0$, $e > 0$ et $e = 0$. Nous nous occuperons spécialement du cas de l'ellipse et de celui de la parabole.

1° $e < 0$. La conique est une ellipse.

Posons

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2},$$

d'où

$$d\varphi = \sqrt{1-e^2}\,\frac{du}{1-e\cos u} \quad \text{et} \quad 1+e\cos\varphi = \frac{1-e^2}{1-e\cos u}.$$

Substituant et intégrant, il vient

$$\lambda t = a^2\sqrt{1-e^2}(u - e\sin u) + \text{const.}$$

Supposons que, pour $t = 0$, on ait $\varphi = \varphi_0$ et $u = u_0$, il en résultera

$$\lambda t = a^2\sqrt{1-e^2}(u - u_0 - e\sin u + e\sin u_0),$$

ce qui donne l'angle u, et par suite l'angle φ, en fonction du temps.

Si l'on fait $u = 2\pi + u_0$, la formule devient

$$\lambda T = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

Or $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$ est l'expression de l'aire de l'ellipse. En l'appelant A, on a, pour le temps mis par le point M_1 à parcourir l'ellipse entière, $T = \frac{2A}{\lambda}$, λ ayant, comme cela a été dit, la valeur $v_0 r_0$.

2° $e > 1$. *Cas de l'hyperbole.* On intègre en posant

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tang}\frac{u}{2},$$

et l'on obtient

$$\lambda t = a^2\sqrt{e^2-1}\left[e\operatorname{tang}u + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right] + \text{const.}$$

3° $e = 1$. *Cas de la parabole.* On a alors

$$\frac{p^2\,d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \lambda\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^2\,d\varphi}{4\cos^4\frac{\varphi}{2}} = \lambda\,dt.$$

En posant $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = v$, il vient $d\varphi = \frac{2\,dv}{1+v^2}$, d'où

$$2\lambda\,dt = p^2(1+v^2)\,dv,$$

$$2\lambda t = p^2 v + \frac{p^2 v^3}{3} + \text{const.}$$

$$= p^2\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{\varphi}{2}\right) + \text{const.}$$

Si, pour $\varphi = 0$, on a $t = 0$, la constante est nulle, et il vient simplement

$$t = \frac{p^2}{2\lambda}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour $\varphi = \pi$, $t = \infty$.

Il reste à calculer la réaction du cône. Soit R cette réaction. Pour la déterminer, on peut se servir de l'équation du mouvement le long de l'axe des z. Cette équation est la suivante

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -f(\rho)\frac{z}{\rho} - \mathrm{R}\sin\theta + g.$$

En y substituant les valeurs de ρ, $f(\rho)$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$ en fonction de r, on obtient

$$R = g \sin\theta - \frac{\lambda^2}{r^3}\cos\theta.$$