NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Note sur les propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 49-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__49_0>

NOTE SUR LES PROPRIÉTÉS DES LIGNES GÉODÉSIQUES ET DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOIDE;

Par M. A. PICART.

Considérons l'un des ellipsoïdes représentés par l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

où b^2 et c^2 sont des quantités fixes, la première plus petite que la seconde, et ρ^2 un paramètre variable supérieur à b^2 et c^2; et proposons-nous de démontrer géométriquement quelques-unes des plus importantes propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de cette surface.

1. Ces lignes jouissent de la propriété fondamentale commune que le produit du demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à la tangente en un de leurs points, par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point, est constant dans toute leur étendue.

Soit d'abord une ligne géodésique G. Imaginons les tangentes MT, M'T' en deux points infiniment voisins M, M', et leurs tangentes conjuguées MS, M'S sur la surface. Par le centre C de l'ellipsoïde menons un plan parallèle au plan tangent en M, et une droite CI, parallèle à MS, qui rencontre la surface en I. La tangente IH à la section elliptique est parallèle à MT. Menons par le même point C un plan parallèle au plan tangent en M' et une droite CK parallèle à M'S; la tangente KL à la section elliptique est parallèle à M'T'. Le plan KCI est parallèle au plan MSM'. De même, le plan des deux droites IH et KL est parallèle au plan des deux tangentes MT, M′T′. Ce dernier plan, qui est le plan osculateur de la ligne géodésique en M, est perpendiculaire sur le plan tangent MSM′. Donc le plan KCI est perpendiculaire sur le plan IKL. Par conséquent, les perpendiculaires abaissées du point C sur les deux droites IH et KL sont égales.

Menons le demi-diamètre D parallèle à IH. Le parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres CI et D a pour mesure $D \times p$, p étant la distance de I à D. En multipliant l'aire de ce parallélogramme par la perpendiculaire P abaissée du point C sur le plan tangent en M, on a un produit qui est égal au produit des trois demi-axes de l'ellipsoïde. Or la longueur p reste constante, lorqu'on passe du point I au point K. Donc le produit PD est constant.

2. Désignons par a' et b' les deux demi-axes de la section elliptique parallèle au plan tangent en M, et par i l'angle que forme le demi-diamètre D avec le grand axe $2a'$: on a

$$D = \frac{a'b'}{\sqrt{a'^2 \sin^2 i + b' \cos^2 i}}.$$

Par suite

$$PD = \frac{a'b'P}{\sqrt{a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i}} = \text{const.},$$

d'où, puisque $a'b'P$ est constant, il résulte pour la ligne géodésique l'équation

$$a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i = \text{const.}, \tag{2}$$

i étant l'angle que forme la ligne géodésique en un point M avec l'élément de ligne de courbure parallèle à a' en ce point.

3. Les demi-axes a' et b' peuvent s'exprimer en fonction des paramètres μ^2, ν^2 des surfaces homofocales orthogonales représentées par les équations

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

$$(4) \qquad \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1$$

(où μ^2 est compris entre b^2 et c^2, et ν^2 inférieur à b^2 et c^2), qui passent par le point M et qui déterminent par leur intersection avec l'ellipsoïde les lignes de courbure de cette surface relatives à ce point.

En effet, considérons une ligne de courbure correspondant au paramètre μ^2 et la tangente conjuguée en chacun de ses points. Par le centre de l'ellipsoïde menons des parallèles à toutes les tangentes conjuguées. Les points où ces droites rencontrent la surface sont à égale distance du centre. Pour le point N de la ligne de courbure située dans le plan xz, cette distance est égale au demi-diamètre CH conjugué de CN dans la section elliptique faite par le plan xz; or

$$\overline{CN}^2 = \rho^2 + \mu^2 - c^2, \quad CN^2 + \overline{CH}^2 = 2\rho^2 - c^2,$$

d'où

$$\overline{CH}^2 = \rho^2 - \mu^2.$$

Ainsi $b'^2 = \rho^2 - \mu^2$, de même $a'^2 = \rho^2 - \nu^2$. Remplaçons dans l'équation de la ligne géodésique a'^2 et b'^2 par ces valeurs, nous aurons

$$(5) \qquad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.}$$

4. Pour une ligne de courbure, le produit PD est aussi constant, parce que les parallèles à la tangente MT de la courbe en M et à sa conjuguée MS, menées par le

centre de l'ellipsoïde, sont précisément les demi-axes de la section elliptique centrale parallèle au plan tangent en M. Alors $D\mu$ devient $a'b'$; et $a'b'P$ étant constant ainsi que b', le produit $a'P$ est constant.

5. Il reste à déterminer la valeur de la constante qui figure dans l'équation de la ligne géodésique.

Or, *toutes les tangentes à une ligne géodésique forment une surface développable qui est circonscrite à une même surface homofocale.*

C'est là une seconde propriété importante des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

Soient MT et M'T' deux tangentes infiniment voisines. Parmi les ellipsoïdes homofocaux, il y en a un dont la normale NA, au point N d'intersection avec MT, est située dans le plan de MT, M'T'. Ce plan est tangent en N à l'une ($\mu^2 = \alpha^2$) des deux surfaces orthogonales qui passent en ce point. Car si l'on imagine le cône circonscrit à l'ellipsoïde (1) du point N, on sait que ce cône a pour axes les normales NA, NB, NC aux trois surfaces orthogonales passant par le point N. Or le plan TMT' mené par la génératrice TM de ce cône lui est normal, comme étant normal à l'ellipsoïde auquel le cône est tangent en M. C'est donc un plan principal du cône, qui dès lors contient l'une des normales NB, NC. Si l'on considère une troisième tangente infiniment voisine des premières de la ligne géodésique, on reconnaîtra qu'en un point N' de M'T', infiniment voisin de N, situé sur la surface ($\mu^2 = \alpha^2$), le plan T'M'T'', contenant la normale NA à l'ellipsoïde homofocal qui passe par le point N', est tangent à cette même surface ($\mu^2 = \alpha^2$). On voit donc que tous les plans osculateurs de la ligne géodésique sont tangents à la surface ($\mu^2 = \alpha^2$).

Il en résulte que la constante de l'équation (5) est égale à α^2. Car la surface $(\mu^2 = \alpha^2)$ coupe l'ellipsoïde suivant une ligne de courbure à laquelle la ligne géodésique est tangente, et, comme au point de contact i est égal à zéro, l'équation pour ce point se réduit à $\mu^2 =$ const.

L'équation de la ligne géodésique est donc

$$(6) \qquad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2.$$

C'est une relation entre les coordonnées curvilignes superficielles μ^2, ν^2 de chacun de ses points et l'angle i qu'elle forme en ce point avec la ligne de courbure $(\mu^2 = \text{const.})$ passant par ce point.

6. Si l'on revient à l'équation $\text{PD} = \text{const.}$, commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure de l'ellipsoïde, on peut évaluer sa constante au moyen de α^2. En effet, elle est égale à

$$\frac{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i}},$$

ou à

$$\frac{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - \nu^2)\sin^2 i + (\rho^2 - \mu^2)\cos^2 i}},$$

ou enfin à

$$\frac{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}.$$

Ainsi l'on a

$$(7) \qquad \text{PD} = \frac{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho' - c^2)}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}.$$

7. Considérons en particulier les lignes géodésiques passant par un ombilic de l'ellipsoïde.

La surface $(\mu^2 = \alpha^2)$ à laquelle tous les plans osculateurs d'une ligne géodésique sont tangents se réduit alors à la portion du plan xz limitée par l'hyperbole

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$. Toutes les tangentes de cette ligne viennent donc rencontrer cette hyperbole, et ses plans osculateurs lui sont tangents.

8. Proposons-nous de trouver l'expression de la différence entre la longueur $NM = t$ de la portion de tangente à une ligne géodésique ombilicale, limitée par son point de contact M et par le point où elle rencontre l'hyperbole limite, et la longueur $OM = s$ de cette ligne comptée de l'ombilic O jusqu'au point M.

Si l'on considère une autre tangente $N'M'$ infiniment voisine, et qu'on désigne par ω l'angle que forme la tangente NM avec la tangente NT à l'hyperbole, on a

$$d(t-s) = NN' \cos\omega.$$

Pour calculer la valeur de $\cos\omega$, nous rappellerons que le cône circonscrit d'un point quelconque N de l'hyperbole ombilicale à l'ellipsoïde est de révolution autour de NT, et qu'alors on a à trouver le cosinus de l'angle que forme la tangente en N à l'hyperbole avec la tangente menée du point N à l'ellipse $\left(y=0,\ \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1\right)$.

Or, si l'on désigne par ρ_1 le demi-grand axe de l'ellipse homofocale qui passe par le point N, par r et r' les rayons vecteurs focaux du point N de cette ellipse, et par α_1 l'angle que forme sa normale NT avec chacun de ces rayons vecteurs, on a, d'une part, dans cette ellipse,

$$4c^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'(1-2\cos^2\alpha_1),$$

d'autre part, dans l'hyperbole,

$$4b^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.$$

En retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$c^2 - b^2 = rr'(1 - \cos^2\alpha_1).$$

Cette équation jointe à la première, qui équivaut à cette autre

$$rr' \cos^2\alpha_1 = \rho_1{}^2 - c^2,$$

fournit les valeurs de rr' et de $\cos^2\alpha_1$, soit

$$\cos^2\alpha_1 = \frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - b^2}, \quad rr' = \rho_1{}^2 - b^2.$$

Cela posé, la propriété de l'ellipse, en vertu de laquelle le produit des distances des deux foyers à une tangente est égal au carré du petit axe, donne l'équation

$$rr' \sin(\omega - \alpha_1)\sin(\omega + \alpha_1) = \rho^2 - c^2,$$

ou

$$(\rho_1^2 - b^2)(\cos^2\alpha_1 - \cos^2\omega) = \rho^2 - c^2,$$

ou

$$(\rho_1 - b^2)\left(\frac{\rho_1 - c^2}{\rho_1^2 - b^2} - \cos^2\omega\right) = \rho^2 - c^2,$$

d'où

(8) $$\cos\omega = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho^2}{\rho_1^2 - b^2}}.$$

9. Quant à NN', sa valeur est donnée par la formule qui exprime généralement la distance en un point d'une surface du second ordre à la surface homofocale infiniment voisine. Cette distance n'est autre chose que la variation que subit la distance P du centre au plan tangent en ce point, lorsque son expression

$$P = \sqrt{\rho^2\cos^2\alpha + (\rho^2 - b^2)\cos^2\beta + (\rho^2 - c^2)\cos^2\gamma},$$

où α, β, γ sont les angles de la normale avec les axes, varie avec ρ seulement. On trouve ainsi, en tenant compte de la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

(9) $$dP = \frac{\rho\, d\rho}{P}.$$

Mais P, exprimé en fonction de ρ^2, μ^2, ν^2, est égal à

$$\sqrt{\frac{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}.$$

Donc, généralement, en un point quelconque d'une surface (ρ), on a

(10) $$dP = \frac{d\rho\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Pour le point N situé dans le plan xz, où $\rho = \rho_1$, $\mu^2 = \nu^2 = b^2$; on a donc

(11) $$NN' = d\rho\sqrt{\frac{\rho_1^2 - b^2}{\rho_1^2 - c^2}}.$$

10. Substituant les valeurs de $\cos\omega$ et de NN′ dans la valeur de $d(t-s)$, on obtient

(12) $$d(t-s) = \frac{d\rho_1\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

On peut exprimer cette différentielle en fonction de ω. On a, en effet,

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2\cos^2\omega}}{\sin\omega},$$

d'où

$$\sqrt{\rho_1^2 - c^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2\cos^2\omega - c^2\sin^2\omega}}{\sin\omega},$$

$$\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} = \frac{\cos\omega\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sin\omega},$$

$$d\rho_1 = -\frac{(\rho^2 - b^2)\cos\omega\, d\omega}{\sin\omega\sqrt{\rho^2 - b^2\cos^2\omega}};$$

par suite

$$(13)\quad d(t-s) = -\frac{(\rho^2-b^2)^{\frac{3}{2}}\cos^2\omega\, d\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\rho^2-b^2\cos^2\omega)(\rho^2-b^2\cos^2\omega-c^2\sin^2\omega)}}.$$

L'intégration donne

$$t-s = \int_\rho^{\rho_1} d\rho_1 \frac{\sqrt{\rho_1^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho_1^2-c_2}}$$

$$= \int_\rho^{\rho_1} \frac{\rho_1^2\, d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-\rho^2)(\rho_1^2-c^2)}} - \rho^2\int_\rho^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-\rho^2)(\rho_1^2-c^2)}}.$$

En posant $\rho_1 = cx$,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} t-s = {}& \frac{c^2}{\rho}\int_{\frac{\rho}{c}}^{x} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{c^2}{\rho^2}x^2\right)}} \\ & -\rho\int_{\frac{\rho}{c}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{c^2}{\rho^2}x^2\right)}}. \end{aligned}\right.$$

On voit que $t-s$ s'exprime au moyen des transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce.

11. Nous terminerons ce qui est relatif aux lignes géodésiques de l'ellipsoïde par la recherche de l'angle que forme le plan osculateur d'une ligne géodésique ombilicale avec le plan des ombilics.

Le plan osculateur en M est MNT, ou M′N′T; le plan osculateur en M′ est M′N′T′.

Désignons par θ l'angle que le plan osculateur fait avec le plan des ombilics.

Le trièdre qui a son sommet en N′ et pour faces M′N′T, M′N′T′, T′N′T donne

$$\frac{\sin(\theta+d\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin\omega}{\sin \mathrm{M'N'T'}}.$$

Posons $M'N'T' = \omega - u$, $T'N'T = \varepsilon$; on a

$$u = \varepsilon \cos\theta, \quad \frac{\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\omega - \sin(\omega - u)}{\sin\omega},$$

ou

$$\frac{\cos\theta . d\theta}{\sin\theta} = \frac{u\cos\omega}{\sin\omega} = \frac{z\cos\theta . \cos\omega}{\sin\omega},$$

ou

$$(15) \qquad \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{\varepsilon\cos\omega}{\sin\omega};$$

ε est l'angle de contingence de l'hyperbole ombilicale au point N; il est égal à $\frac{NN'}{R}$, R désignant le rayon de courbure de cette courbe en N.

Or

$$NN' = d\rho_1 \frac{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

12. Quant au rayon de courbure, nous le déduirons de la formule générale du rayon de courbure d'une section normale de l'ellipsoïde en un point M.

Soient $d\rho$ le rayon vecteur correspondant de l'indicatrice et k la distance du plan de l'indicatrice au plan tangent; le rayon de courbure $r = \frac{d\rho^2}{2k}$.

Menons le demi-diamètre CM, et soit h la portion de ce diamètre comprise entre le point M et le plan de l'indicatrice. On a

$$h = \frac{k}{\cos\varphi},$$

φ étant l'angle que forme CM avec la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en M. Menons le demi-diamètre CN parallèle à $d\rho$; désignons les deux demi-diamètres par a' et b'. Le plan MCN détermine dans l'ellipsoïde une ellipse ayant pour diamètres conjugués CM et CN; on a dans cette ellipse

$$\frac{(a'-h)^2}{a'^2}+\frac{d\rho^2}{b'^2}=1,$$

ou

$$\frac{2h}{a'}=\frac{d\rho^2}{b'^2};$$

donc

$$r=\frac{2hb'^2}{2ka'}=\frac{b'^2}{a'\cos\varphi},$$

ou

(16) $$r=\frac{b'^2}{\mathrm{P}},$$

P étant la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.

En appliquant cette formule générale, on aura

$$\mathrm{R}=\frac{d^2}{\mathrm{P}};$$

or

$$d^2=\rho_1^2-b_1^2,\quad \mathrm{P}=\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}},$$

d'où

$$\mathrm{R}=\frac{(\rho_1^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{c^2-b^2}};$$

par suite

$$\varepsilon=\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\rho_1^2-b^2}\,\frac{d\rho^1}{\sqrt{\rho_1^2-c^2}}.$$

Mais

$$\cos\omega=\sqrt{\frac{\rho_1^2-\rho^2}{\rho_1^2-b^2}},$$

d'où

$$\sin\omega=\sqrt{\frac{\rho^2-b^2}{\rho_1^2-b^2}}.$$

Donc on a

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \cdot \frac{d\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{(\rho_1^2 - b^2)\sqrt{\rho_1^2 - c^2}},$$

ou

$$(17) \quad d \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \cdot \frac{d\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{(\rho_1^2 - b^2)\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

On pourrait, comme précédemment, exprimer cette différentielle en fonction de ω et $d\omega$. On trouverait ainsi

$$(18) \quad d \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = - \frac{b\sqrt{c^2 - b^2 \cos^2\omega}\, d\omega}{\sqrt{(\rho^2 - b^2\cos^2\omega)(\rho^2 - b^2\cos^2\omega - c^2\sin^2\omega)}}$$

et, en intégrant par rapport à ρ_1 de ρ à ρ_1 et conséquemment par rapport à ω de $\frac{\pi}{2}$ à ω, on obtiendrait

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{\theta_0}{2} = - b\sqrt{c^2 - b^2} \\ &\times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{(\rho^2 \operatorname{tang}^2\omega + \rho^2 - b^2)[(\rho^2 - c^2)\operatorname{tang}^2\omega + \rho^2 - b^2)]}}, \end{aligned} \right.$$

θ_0 étant l'angle de la ligne géodésique avec le plan ombilical à l'ombilic.

13. Démontrons maintenant quelques propriétés des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Nous avons vu que, le long d'une ligne de courbure, on a

$$PD = \text{const}.$$

Le rayon de courbure, étant $\frac{D^2}{P}$, est alors égal à $\frac{\text{const}}{P^3}$. Il est donc proportionnel au cube de la distance de la surface à la surface homofocale infiniment voisine.

Si l'on considère une ligne de courbure de l'ellipsoïde, le demi-diamètre parallèle à la tangente conjuguée en chaque point est constant : donc le rayon de courbure de la section principale perpendiculaire à la ligne de courbure considérée varie proportionnellement à la distance de la surface à la surface infiniment voisine.

De ces deux propositions découle la suivante :

Suivant toute ligne de courbure d'un ellipsoïde, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal.

14. Considérons un quadrilatère $A_0 A_1 A_2 A_3$, formé par quatre lignes de courbure. Soient a_0, a_1, a_2, a_3 les distances de la surface proposée à la surface homofocale infiniment voisine aux points A_0, A_1, A_2, A_3 ; soient R_0, R_1, R_2, R_3 les rayons de courbure principaux de la surface aux mêmes points, suivant $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_0$. Nous avons, d'après ce qui précède,

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{a_0^3}{a_1^3},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{a_2^3}{a_3^3},$$

$$\frac{R_3}{R_0} = \frac{a_3}{a_0};$$

multipliant les égalités membre à membre, il vient

$$(20) \qquad a_0^2\, a_2^2 = a_1^2\, a_3^2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

Ainsi, si sur une surface du second degré on considère un rectangle formé par quatre lignes de courbure, les distances des sommets de ce rectangle à la surface du second degré homofocale infiniment voisine forment une proportion.

15. Enfin démontrons que les lignes circulaires de l'ellipsoïde en un point sont également inclinées sur chacune des lignes de courbure qui passent par ce point.

Le rayon de courbure d'une section normale est $\frac{D^2}{P}$, D étant le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à la tangente et P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent; or D et P sont les mêmes pour les deux sections circulaires : donc les rayons de courbure des sections normales dirigées suivant les tangentes aux lignes circulaires en leur point d'intersection sont égaux. Il en résulte la proposition énoncée.

16. Remarquons que le rayon de courbure d'une section normale le long d'une section circulaire est en raison inverse de la distance du plan tangent au centre.