Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 473-479
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__473_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1337

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 480);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Trouver un cercle par rapport auquel la cissoïde se transforme en elle-même par polaires réciproques.

(F. FOURET.)

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$$

l'équation de la cissoïde donnée. Cette courbe étant symétrique par rapport à l'axe des x, le cercle directeur cherché aura son centre sur cet axe, et son équation sera de la forme

$$(2) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + C = 0.$$

On obtiendra l'équation de la courbe polaire réciproque de la cissoïde en éliminant x et y entre l'équation (1) et les relations suivantes :

$$\frac{f'_{x_1}}{F'_{x_1}} = \frac{f'_{y_1}}{F'_{y}} = \frac{f'_{z_1}}{F'_{z}},$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \frac{2x_1 + A}{3x^2 + y^2} = \frac{y_1}{y(x-a)} = \frac{Ax_1 + 2C}{-ay^2}.$$

Multipliant les deux termes du premier rapport par a et ajoutant terme à terme avec le dernier, on en déduit

$$\frac{(2a+A)x_1 + Aa + 2C}{3a}\,\frac{1}{x^2} = \frac{y_1}{y(x-a)},$$

et

$$\frac{(2a+A)x_1 + Aa + 2C}{3a}\,\frac{1}{x^2} = \frac{Ax_1 + 2C}{-ay^2}.$$

Si, maintenant, on multiplie ces deux proportions l'une par l'autre, après avoir élevé la première au carré, on obtient

$$(4)\qquad \left[\frac{(2a+A)x_1 + Aa + 2C}{3a}\right]^3 \frac{1}{x^6} = \frac{y_1^2(Ax_1 + 2C)}{-ay^4(x-a)^2}.$$

Or, l'équation (1) peut s'écrire

$$(5)\qquad x^3 = (a-x)y^2, \quad \text{d'où} \quad x^6 = (a-x)^2y^4;$$

l'équation (4) devient donc

$$\left[\frac{(2a+A)x_1 + Aa + 2C}{3a}\right]^3 + \frac{y_1^2}{a}(Ax_1 + 2C) = 0.$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (5), il suffit de poser

$$2a + A = 3a \quad \text{et} \quad Aa + 2C = 0,$$

d'où

$$A = a \quad \text{et} \quad C = -\frac{a^2}{2}.$$

Par suite, le cercle cherché a pour équation

$$x^2 + y^2 + ax - \frac{a^2}{2} = 0,$$

ou

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{3a^2}{4}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Leinekugel.

Question 1404

(voir 3e serie, t. I, p. 335);

PAR M. MORET-BLANC.

On peut toujours trouver deux nombres t et u, tels que

$$At^3+Bu^2+C$$

soit divisible par 7; A, B, C *étant trois nombre sentiers, positifs ou négatifs, non divisibles par* 7.

(PELLET.)

Il suffit de prouver que l'on peut toujours choisir t et u de telle sorte que le résidu de At^3+Bu^2, par rapport au module 7, soit l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6; et, par conséquent, qu'ajouté au résidu de C, il donne une somme égale à 7.

Les résidus de t^3 sont 0, 1, 6; ceux de u^2 sont 0, 1, 2, 4.

On a donc la Table de résidus suivante :

A.	At^3.	B.	Bu^2.
1.......	0,1,6	1.......	0,1,2,4
2.......	0,2,5	2.......	0,2,4,1
3.......	0,3,4	3.......	0,3,6,5
4.......	0,4,3	4.......	0,4,1,2
5.......	0,5,2	5.......	0,5,3,6
6.......	0,6,1	6.......	0,6,5,3

Il faut vérifier que, quels que soient les résidus de A et B, on obtient les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 en ajoutant un résidu de At^3 à un résidu de Bu^2. La vérification se fait immédiatement sur les deux premières lignes; or elle suffit, car, en multipliant les résidus 1, 2, 3, 4, 5, 6 par un nombre quelconque premier avec 7 et divisant par 7, on ne fait que reproduire les mêmes résidus dans un autre ordre.

La vérification des lignes 1 et 1 entraîne donc la vérification des lignes 2 et 2, 3 et 3, 4 et 4, 5 et 5, 6 et 6; et, par suite de deux lignes de rangs quelconques, car on a toutes les combinaisons de valeurs, comme on le voit dans le tableau. Le théorème est donc démontré.

Question 1408

(voir 3e serie, t. I, p. 336),

PAR M. LIONNET.

Trouver les nombres pairs et positifs ayant chacun cette curieuse propriété d'être d'autant de manières la somme de deux impairs premiers que celle de deux impairs composés. (LIONNET.)

Pour résoudre ce problème, nous ferons usage de la formule

$$q + x = y + z,$$

dont nous avons donné la démonstration [1], et dans laquelle q désigne le plus grand nombre entier contenu dans le quart d'un nombre pair et positif quelconque $2a$, x le nombre des manières dont $2a$ est la somme de deux impairs premiers, y celui dont $2a$ est la somme de deux impairs composés et inégaux, et z celui des impairs premiers inférieurs à $2a$.

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVIII, p. 356.

Cela étant, nous distinguerons trois cas, selon que a est pair, impair premier, ou impair composé. Dans chacun des deux premiers cas, $2a$ n'étant pas la somme de deux impairs composés égaux, chaque fois que nous trouverons $x = y$ ou, *bien plus facilement*, $q = z$, nous aurons pour $2a$ une solution du problème proposé. Dans le troisième cas, il faudra qu'on ait $x = y + 1$ ou $q - z = -1$. Or, de $2a = 2$ à $2a = 122$, on ne trouve que les six solutions comprises dans le tableau suivant :

$2a$.....	$q + x = y + z,$
96.....	$24 + 7 = 7 + 24,$
98.....	$24 + 4 = 3 + 25,$
100.....	$25 + 6 = 6 + 25,$
102.....	$25 + 9 = 8 + 26,$
120.....	$30 + 12 = 12 + 30,$
122.....	$30 + 4 = 4 + 30,$

et, pour chacune des trente valeurs suivantes et consécutives de $2a$:

$$122 + 2,\quad 122 + 4,\quad \ldots,\quad 122 + 60 = 182,$$

on trouve constamment $q - z > 0$. S'il en est ainsi pour toute valeur de $2a > 182$, il est clair que les six nombres inscrits au-dessous de $2a$ dans le tableau précédent répondront seuls à l'énoncé. C'est ce que nous allons établir en nous appuyant sur le principe suivant :

Quelle que soit la différence $q - z$ (négative, nulle ou positive), relative à un nombre pair $2a > 5$, la différence $q' - z'$, relative au nombre pair $2a' = 2a + 60$, sera au moins égale à $q - z$.

En effet, comme on aura $q' - q = 15$, il suffira de prouver que $z' - z$ est au plus égal à 15, c'est-à-dire que, parmi les trente impairs consécutifs,

$$2a+1,\ 2a+3,\ \ldots,\ 2a+59,$$

il y a au plus quinze impairs premiers ou au moins quinze impairs composés. Or, parmi trente impairs consécutifs > 5, il y a : 1° deux impairs composés multiples de 15; 2° $(6-2)=4$ impairs composés multiples de 5 et premiers à 3; 3° $(10-2)=8$ impairs composés multiples de 3 et premiers à 5; 4° au moins 4 impairs composés multiples de 7, dont il faut déduire au plus un multiple de 35 pouvant se trouver parmi les multiples de 5 déjà comptés comme impairs composés, puis deux multiples de 21 pouvant se trouver parmi les multiples de 3. Il restera donc au moins un impair composé multiple de 7 et premier à 15, lequel nombre 1, ajouté au nombre $(2+4+8)=14$ des impairs composés non premiers à 15, donne un minimum de quinze impairs composés différents.

Ce principe étant démontré, si l'on ajoute 60 à chacun des trente nombres pairs consécutifs 124, 126, ..., 182 pour chacun desquels on a $q-z>0$, on obtiendra une nouvelle série 184, 186, ..., 242 de trente nombres pairs consécutifs faisant suite à la précédente, et pour chacun desquels on aura encore $q-z>0$, et ainsi de suite; donc, en vertu de ce qui précède, aucune valeur de $2a$, supérieure à 122, n'est une solution du problème proposé; c'est ce qu'il restait à démontrer.

Question 1409

(voir 3ᵉ série, t. I, p. 336);

PAR M. E. BÉNÉZECH,

Élève au Prytanée militaire, à La Flèche.

Quelle valeur faut-il donner à l'angle A *au sommet d'un triangle isoscèle* ABC, *pour que le quadrilatère,* *ayant pour sommets les pieds* A′, B′, C′ *des trois hauteurs du triangle, et le milieu de la droite qui joint leur point de concours au sommet* A, *soit un parallélogramme?* (Lionnet.)

Soient M le point de concours des hauteurs et D le milieu de MA.

Les quatre points A′, B′, C′, D se trouvent sur le cercle des neuf points du triangle, l'angle B′DC′ est le supplément de B′A′C′, et, comme ces deux angles doivent être égaux entre eux, pour que le quadrilatère B′DC′A′ soit un parallélogramme, chacun d'eux est droit. Il faut, de même, que les angles DB′A′, DC′A′ soient droits. Le triangle ABC étant isoscèle, A′B′ est égal à A′C′: ainsi le parallèlogramme est un carré.

Le quadrilatère AB′MC′ est inscriptible dans un cercle dont D est le centre : donc l'angle A est égal à 45° [1].

Note.— Même solution de MM. L. Reboul; E. Dervillée; Clausset; Clavel; Robaglia; Regnier, élèves au Prytanée militaire, à la Flèche; et par M. Victor de Strékalof, à Saint-Pétersbourg

M. Moret-Blanc a résolu la question au moyen de calculs trigonométriques qui ont donné, pour l'angle A, les valeurs 45° et 135°.