NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Compositions données aux examens de licence dans les différentes facultés de France, en 1880 [suite]

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 465-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__465_0>

COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880 [SUITE (1)].

Bordeaux.

Composition d'Analyse. — Équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes représentées par une équation contenant un paramètre variable.

Extension aux trajectoires obliquangles.

Application aux trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0,$$

λ étant le paramètre variable.

Étendre, si le temps le permet, la recherche des trajectoires orthogonales ou obliquangles au cas des courbes représentées par des équations en coordonnées polaires.

Composition de Mécanique. — Un point matériel M assujetti à rester sur une droite CD est attiré vers le point O par une force qui varie en raison inverse du carré de la distance. Ce corps part sans vitesse d'un point A de la droite. On demande :

1° De déterminer la vitesse du point M à un instant donné (indiquer diverses méthodes);

2° De trouver la pression exercée par le point M sur la droite OA;

3° De résoudre complètement le problème en supposant les angles O et X, que font les droites OM, OA avec

(1) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. I, p. 133.

la perpendiculaire à CD, assez petits pour que l'on puisse poser $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Exprimer en fonction de θ le temps t que le mobile met à atteindre une position M quelconque ;

4° De déterminer la longueur L du pendule simple OM′ qui, vu du point O, paraîtrait osciller dans le même temps que le point M (OM et OM′ doivent toujours former le même angle θ avec la perpendiculaire à CD, au degré d'approximation indiqué).

Épreuve pratique. — Le 12 mars 1880, on a observé α d'Orion vers l'Ouest, à $14^\circ 23' 15'',23$ au-dessus de l'horizon. On demande de calculer l'heure sidérale de l'observatoire et l'azimut de l'étoile à l'instant de l'observation. Les coordonnées de α d'Orion sont

$$\text{Æ} = 5^h 48^m 42^s,21,$$
$$\delta = 7^\circ 22' 57'',2.$$

La latitude du point d'observation est $44^\circ 50' 19'',0$.

Caen.

Composition de Géométrie analytique. — Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connaît un sommet et une asymptote.

Composition d'Analyse et de Mécanique. — 1° Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{c^2 \cos^2 x + d^2 \sin^2 x} dx.$$

2° Déterminer sur une surface gauche de révolution les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

3° Déterminer l'accélération totale d'un point, connaissant son mouvement relatif par rapport à certains axes et le mouvement de ces axes.

4° Une barre homogène et très mince, reposant sur un plan horizontal parfaitement poli, est choquée par une bille dont la vitesse est perpendiculaire à la barre; en supposant les deux corps parfaitement élastiques, on demande le mouvement qu'ils prendront après le choc.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Grenoble.

Composition d'Analyse. — Trouver une courbe plane telle que, si d'un point fixe pris dans son plan on mène des rayons vecteurs à ses différents points, le lieu de la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur correspondant soit une courbe symétrique de la proposée par rapport au point fixe.

On vérifiera que la courbe trouvée satisfait bien à la condition énoncée.

Composition de Mécanique. — On donne un cylindre vertical à base circulaire, et par un point B de sa surface on lance un point matériel pesant, assujetti à rester sur la surface de ce cylindre. La vitesse initiale est V_0; elle fait un angle α avec la génératrice du point B.

On demande de déterminer le mouvement du point. On demande en outre de déterminer à quelle hauteur maximum il s'élèvera.

Quelle doit être la vitesse initiale V_0 pour que le point, en atteignant cette hauteur maximum, se retrouve sur la génératrice du point de départ B?

Trouver la forme que prend la trajectoire du mobile lorsqu'on développe la surface cylindrique sur un plan.

Calculer la réaction du cylindre sur le point.

Épreuve pratique. — On a mesuré en un lieu de la Terre les hauteurs d'une étoile et du centre de la

Lune au-dessus de l'horizon, ainsi que leur différence d'azimut, et l'on demande sous quel angle leur distance serait vue du centre de la Terre, en tenant compte de la réfraction.

Données.

Hauteur de l'étoile...............	$27°35'$
Hauteur du centre de la Lune.....	$35°20'$
Différence des azimuts............	$13°15'$
Parallaxe horizontale de la Lune..	$57'2''$

Réfraction $\theta = 60'',6 \operatorname{tang} z$, z étant la distance zénithale de l'astre.

Lyon.

Composition d'Analyse. — On demande d'intégrer l'équation

$$(y^3 + 2xy^2)\,dy - 2y^3\,dx + (x+y)(x\,dy - x\,dx) = 0.$$

On indiquera de plus la marche à suivre pour trouver un facteur d'intégrabilité homogène, quand l'équation à intégrer présente cette forme.

Composition de Mécanique. — Un mobile libre, non pesant, est attiré vers deux centres fixes par deux forces proportionnelles à la distance et dont les intensités sont respectivement comme 1 à 3, à l'unité de distance.

On demande d'étudier le mouvement du mobile en supposant qu'il soit d'abord en repos et que le mouvement ait lieu, soit dans le vide, soit dans un milieu résistant. On admettra dans ce dernier cas que la résistance est proportionnelle à la vitesse et a un coefficient très faible.

Épreuve pratique. — En un lieu dont la latitude est égale à $48°50'49''$, on trouve, à un moment donné, pour hauteur d'une étoile $13°57'52''$ et pour déclinaison

$8^\circ 25' 45'', 2$. On demande l'angle horaire de l'étoile au moment de l'observation.

Montpellier.

Composition d'Analyse. — Déterminer l'équation finie d'une courbe gauche d'après les conditions suivantes :

1° La courbe est située sur la surface du cône $x^2 + y^2 = k^2 z^2$;

2° Toutes les tangentes à cette courbe rencontrent le cercle

$$z = h, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Rectification de la courbe. Calcul de la surface du cône comprise entre l'arc de la courbe et deux génératrices fixes.

Composition de Mécanique. — Équations de l'équilibre d'un fil flexible. Application à la chaînette.

Épreuve pratique. — On a trouvé pour les distances zénithales de deux étoiles les valeurs

$$z = 73^\circ 19' 26'', 5,$$
$$z' = 40^\circ 53' 56'', 3,$$

leurs déclinaisons étant d'ailleurs

$$D = 69^\circ 55' 36', 4,$$
$$D' = 81^\circ 34',$$

et la différence $Æ - Æ'$ de leurs ascensions droites étant

$$78^\circ 49' 38'', 3.$$

On demande : 1° d'indiquer les opérations à effectuer pour trouver l'angle du vertical d'une de ces étoiles et de son plan horaire; 2° en supposant que cet angle ait été trouvé égal à $43^\circ 29' 8'',3$, calculer la latitude du lieu et l'angle horaire correspondant à l'observation des deux astres faite simultanément par deux observateurs.

Nancy.

Composition d'Analyse. — 1° Soit une intégrale définie $\int_0^b f(x)\,dx$, dans laquelle $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x = c$ comprise entre a et b; supposons qu'on puisse mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(c-x)^n},$$

n étant positif, et $\varphi(x)$ n'étant pas nul pour $x = c$ et restant fini entre $x = a$ et $x = b$.

On demande d'expliquer dans quel cas $\int_a^b f(x)\,dx$ sera fini, dans quel cas $\int_a^b f(x)\,dx$ sera infini.

Exemples à prendre :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \int_0^\pi \cos^{-p} x \sin^{-q} x\,dx.$$

On demande de démontrer que $\int_a^b f(x)\,dx$ peut être indéterminé. Les candidats choisiront pour exemple $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, et montreront comment cette intégrale pourra devenir déterminée si l'on fait varier x de -1 à $+1$ en le faisant passer par des valeurs imaginaires.

2° Prouver que l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

où n est un nombre entier positif, peut être satisfaite par un polynôme entier et comment on peut en conclure la solution générale.

Composition de Mécanique. — 1° Démontrer le principe de d'Alembert.

2° Étudier le mouvement du pendule cycloïdal dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Toulouse.

Composition d'Analyse. — On considère la surface enveloppe de la sphère représentée par l'équation contenant deux paramètres arbitraires a et b,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+[2-F(b)]^2=\varphi^2(a),$$

F et φ étant deux fonctions données quelconques. Trouver les lignes de courbure de cette surface. On montrera que les lignes de courbure sont des lignes planes et que les plans d'un des systèmes sont parallèles au plan des yz.

Composition de Mécanique. — Une plaque pesante, homogène, infiniment mince, d'égale épaisseur et dont la forme est celle d'un triangle rectangle, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le sommet de l'angle droit. Déterminer :

1° L'angle que fait l'un des côtés de l'angle droit avec l'horizontale située dans le plan d'oscillation de la plaque et passant par le sommet de cet angle droit, quand la plaque est en équilibre;

2° L'amplitude des oscillations que la plaque exécute lorsqu'on l'abandonne à son poids après avoir amené le côté considéré dans une position horizontale.

Épreuve pratique. — Une étoile dont la déclinaison est $+15^\circ$ passe au méridien d'un lieu à 2^h (temps sidéral). La latitude du lieu est 35°. A quelle heure sidérale l'étoile se couchera-t-elle? (*A suivre.*)