NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

X. ANTOMARI

Relation entre les distances mutuelles : 1° de quatre points situés sur un même cercle ; 2° de cinq points situés sur une même sphère

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 462-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__462_1>

RELATION ENTRE LES DISTANCES MUTUELLES : 1° DE QUATRE POINTS SITUÉS SUR UN MÊME CERCLE ; 2° DE CINQ POINTS SITUÉS SUR UNE MÊME SPHÈRE ;

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur au lycée de Carcassonne.

MM. Rouché et de Comberousse, dans leur excellent *Traité de Géométrie,* établissent ces relations en s'appuyant sur la règle de multiplication de deux déterminants.

Voici une démonstration qui nous paraît nouvelle.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées rectangulaires de quatre points A, B, C, D situés sur un même cercle; et a_1, b_1, c_1, d_1 les distances respectives de ces quatre points à un point quelconque O_1 du plan. Exprimant que ces quatre points sont sur un même cercle, on obtient quatre équations de la forme

$$\begin{aligned}
a_1^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma &= 0,\\
b_1^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma &= 0,\\
c_1^2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma &= 0,\\
d_1^2 + \alpha x_4 + \beta y_4 + \gamma &= 0.
\end{aligned}$$

L'élimination des constantes α, β, γ donne

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ b_1^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ c_1^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ d_1^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit sans difficulté que cette relation exprime que : Dans tout quadrilatère inscriptible, si l'on multiplie l'aire du triangle formé par trois sommets, par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres.

Si donc A est l'aire du triangle opposé au sommet A, B celle du triangle opposé au sommet B, etc., la relation précédente peut s'écrire

$$\mathrm{A}a_1^2 - \mathrm{B}b_1^2 + \mathrm{C}c_1^2 - \mathrm{D}d_1^2 = 0.$$

Soient O_2, O_3, O_4 trois autres points quelconques du plan, a_2, b_2, c_2, d_2 les distances respectives du point O_2 aux points A, B, C, D, etc. On aura, comme plus haut,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}a_2^2 - \mathrm{B}b_2^2 + \mathrm{C}c_2^2 - \mathrm{D}d_2^2 &= 0,\\
\mathrm{A}a_3^2 - \mathrm{B}b_3^2 + \mathrm{C}c_3^2 - \mathrm{D}d_3^2 &= 0,\\
\mathrm{A}a_4^2 - \mathrm{B}b_4^2 + \mathrm{C}c_4^2 - \mathrm{D}d_4^2 &= 0.
\end{aligned}$$

L'élimination des constantes A, B, C, D entre ces quatre dernières équations donne la relation

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & d_2^2 \\ a_3^2 & b_3^2 & c_3^2 & d_3^2 \\ a_4^2 & b_4^2 & c_4^2 & d_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est une relation entre les distances respectives de quatre points d'un cercle à quatre points quelconques de son plan.

Pour en déduire la relation que nous avons en vue, il suffit de supposer que O_1 coïncide avec A, O_2 avec B, etc.

Le même procédé est applicable à la recherche de la relation entre les distances mutuelles de cinq points sur une même sphère.

Enfin on peut l'appliquer à la recherche des relations entre les distances mutuelles de cinq points situés d'une manière quelconque dans un plan, de six points situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Cette recherche se fait sans difficulté à l'aide de ce qui précède ; pour cinq points d'un plan, cette relation est

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} \\ d_{2,1} & 0 & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & 0 & d_{3,4} & d_{3,5} \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & 0 & d_{4,5} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,3} & d_{5,4} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$d_{i,k}$ désignant le carré de la distance du point i au point k, en appelant 1, 2, 3, 4, 5 les cinq points, et en posant $d_{ik} = d_{ki}$.
