E. Habich

Théorème de cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 458-462
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__458_1>

THÉORÈME DE CINÉMATIQUE;

PAR M. E. HABICH,

Directeur de l'École spéciale des Constructions et des Mines, à Lima.

Soient (A) une courbe tracée sur le plan d'une figure mobile dans son plan; (B) son enveloppe sur le plan fixe; (C) et (C′) les courbes roulantes, c'est-à-dire les lieux du centre instantané de rotation sur le plan fixe, et par rapport à la figure mobile.

Soient K′ et K les centres de courbure de l'enveloppée (A) et de son enveloppe (B); O_1 le point actuel de contact des lignes (C′) et (C), c'est-à-dire le centre instantané de rotation; et O_2 le centre instantané géométrique du second ordre. Ce dernier point est situé, comme on sait, sur la normale commune aux courbes roulantes, et à une distance de O_1 égale à

$$O_1O_2 = \frac{RR'}{R \pm R'},$$

R et R′ étant les rayons de courbure des lignes (C) et (C′).

On détermine le centre de courbure de l'enveloppe (B) ou, ce qui revient au même, de la trajectoire décrite par le centre de courbure K' de l'enveloppée (A), par la formule connue,

$$\text{(1)} \qquad KK' = \frac{\overline{K'O_1}^2}{K'H};$$

H est la projection du centre instantané du second ordre O_2 sur la normale $K'O_1$.

Pour interpréter géométriquement la formule (1), prenons un point *quelconque* I du plan, joignons-le aux points K', O_1 et à la projection H du centre instantané du second ordre O_2, traçons par le centre O_1 une parallèle O_1L à HI, et par le point L où cette parallèle rencontre K'I, la droite LK parallèle à IO_1 : cette dernière rencontre $K'O_1$ au centre K de l'enveloppe (B).

Effectivement on a

$$\frac{KK'}{K'O_1} = \frac{K'L}{K'I} = \frac{K'O_1}{K'H},$$

d'où

$$KK' = \frac{\overline{K'O_1}^2}{K'H}.$$

Dans les constructions de la formule (1) que nous avons eu l'occasion de rencontrer, dans les ouvrages qui traitent de cette question, on suppose le point I en coïncidence soit avec le centre O_2, soit avec un point quelconque de la droite O_2H.

Une construction inverse donnerait la projection H du centre de second ordre O_2, connaissant les centres de courbure K', K et le centre instantané de rotation O_2.

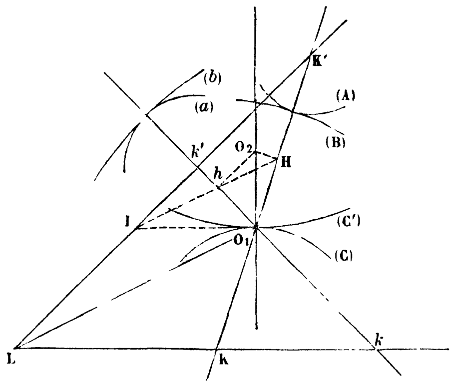
Il est évident que cette construction est applicable au cas où le centre du second ordre O_2 se trouverait sur la normale commune à l'enveloppée et à l'enveloppe, c'est-à-dire quand il serait sa propre projection. En particulier, connaissant les lignes roulantes (C) et (C′), elle permettra de déterminer le centre instantané du second ordre O_2, comme l'avait déjà indiqué M. Ph. Gilbert dans son excellent *Cours de Mécanique analytique* (1877, p. 58).

Soient maintenant k' et k les centres de courbure d'une seconde enveloppée (a) et de son enveloppe (b), et h la projection du centre instantané du second ordre O_2 sur la normale $O_1 k'$.

Prenons le point d'intersection des droites $k'K'$ et hH qui unissent respectivement les centres de courbure k' et K' de deux enveloppées (a) et (A) et les projections h et H du centre O_2 sur leurs normales, pour le point I de la construction donnée plus haut, et achevons-la. On aura $O_1 L$ parallèle à HhI, et les deux centres de courbure k et K des enveloppées (b) et (B) se trouveront sur la même droite LKk parallèle à $O_1 I$. On peut donc énoncer le théorème général suivant :

Dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, les droites passant par les centres de courbure de deux lignes de la figure mobile et par les centres de courbure de leurs enveloppes sur le plan fixe se rencontrent en un point de la droite menée par le centre instantané de rotation, parallèlement à celle qui joint les projections du centre instantané du second ordre, sur les normales au premier et au second système d'enveloppées et d'enveloppes.

Si le centre instantané du second ordre se trouvait sur une des deux normales, il serait lui-même sa propre projection, et la droite $O_1 L$ serait perpendiculaire à l'autre normale. En particulier, si un des deux systèmes de courbes tangentes (a), (A) ou (b), (B), était constitué par les courbes roulantes (C) et (C′), on obtiendrait le théorème dû à Euler ([1]), mais attribué généralement à Savary, qui l'avait énoncé sous une forme plus



explicite que Euler, dans ses *Leçons de Mécanique* à l'École Polytechnique, à savoir :

Les droites qui joignent les centres de courbure de l'enveloppée (A) *et de la courbe mobile* (C′) *d'une part, et de l'enveloppe* (B) *et de la courbe fixe* (C) *de l'autre, se coupent en un point de la perpendiculaire élevée au centre instantané de rotation sur la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée.*

Une construction inverse de la construction générale que nous avons donnée permettrait de déterminer, avec la même facilité, les projections h et H du centre instantané géométrique du second ordre O_2, connaissant les centres de courbure k' et K′ des enveloppées (a) et (A) et k et K de leurs enveloppes (b) et (B), correspondant

([1]) *Supplementum de figura dentium rotarum.* (*Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. XI, pro anno 1765; imprimé en 1767, pages 207 à 231).

à la position considérée de la figure mobile. Les projections h et H une fois déterminées, on n'aurait qu'à tracer une circonférence de cercle par ces deux points et le centre instantané de rotation O_1, pour avoir la *circonférence des inflexions* dont le diamètre passant par O_1 donne la direction de la normale commune aux courbes roulantes (C') et (C), et le point diamétralement opposé à O_1 est le centre instantané du second ordre O_2.

Nous n'insisterons pas sur d'autres manières de démontrer notre théorème général et sur ses conséquences, l'objet unique de cette Note étant de l'établir par la voie qui nous a paru la plus directe et la plus simple.