NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MARCHAND

Note sur un développement d'une fonction en série

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 450-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__450_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE SUR UN DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE;

PAR M. J. MARCHAND,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. LEMME. — Soit $F(x)$ *une fonction de* x *qui donne une intégrale finie et déterminée lorsqu'on l'intègre entre les limites* μ_1 *et* μ *de la variable.*

La valeur de l'intégrale ne change pas si, conservant les mêmes limites, on substitue à la variable l'expression linéaire $\mu_1 + \mu - x$.

En effet, dans

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x)\,dx,$$

posons

$$\mu_1 + \mu - x = z,$$

on aura

$$-\int_{\mu}^{\mu_1} F(z)\,dz = \int_{\mu_1}^{\mu} F(z)\,dz,$$

ce qu'il fallait prouver.

L'intégrale proposée, considérée comme une aire plane qu'on ferait pivoter autour de l'ordonnée fournie par la valeur moyenne de la variable $\frac{\mu_1 + \mu}{2}$, aurait conduit à la même conclusion.

Les deux intégrales sont dites transformées l'une de l'autre.

La propriété ci-dessus n'est, à ma connaissance, énoncée nulle part. Sans la croire nouvelle, néanmoins mon but est de montrer ici qu'on peut en tirer parti.

2. Soit à intégrer

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x)\,dx;$$

$F'(x)$ est supposée continue ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées entre les limites proposées; remplaçons cette intégrale par sa transformée. En appliquant à cette dernière la règle de l'intégration par parties, on aura successivement

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F'(\mu_1+\mu-x)\,dx$$
$$= \mu\,F'(\mu_1) - \mu_1 F'(\mu) + \int_{\mu_1}^{\mu} F''(\mu_1+\mu-x)\,\frac{x}{1}\,dx,$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F''(\mu_1+\mu-x)\,\frac{x}{1}\,dx$$
$$= \frac{\mu^2}{1.2}F''(\mu_1) - \frac{\mu_1^2}{1.2}F''(\mu) + \int_{\mu_1}^{\mu} F'''(\mu_1+\mu-x)\,\frac{x^2}{1.2}\,dx,$$

. . . . ,

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F^{n-1}(\mu_1+\mu-x)\frac{x^{n-2}}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$= \frac{\mu^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(\mu_1) - \frac{\mu_1^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(\mu)$$
$$+ \int_{\mu_1}^{\mu} F^{n}(\mu+\mu_1-x)\,\frac{x^{n-1}\,dx}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, et remarquant que

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x)\,dx = F(\mu) - F(\mu_1),$$

il viendra

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}(\mu)-\mathrm{F}(\mu_1)\\
&=\frac{\mu}{1}\mathrm{F}'(\mu_1)-\frac{\mu_1}{1}\mathrm{F}'(\mu)+\frac{\mu^2}{1.2}\mathrm{F}''(\mu_1)-\frac{\mu_1^2}{1.2}\mathrm{F}''(\mu)\\
&\quad-\ldots+\frac{\mu^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^{n-1}(\mu_1)-\frac{\mu_1^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^{n-1}(\mu)\\
&\quad+\int_{\mu_1}^{\mu}\mathrm{F}^n(\mu_1+\mu-x)\frac{x^{n-1}\,dx}{1.2\ldots(n-1)}.
\end{aligned}$$

Cela posé, on sait que, si u et v sont deux fonctions continues et que v conserve le même signe entre deux limites données, on peut écrire

$$\int_{\mu_1}^{\mu} uv\,dx=\mathrm{U}\int_{\mu_1}^{\mu} v\,dx,$$

U représentant la valeur de u pour une certaine substitution x_1 comprise entre μ_1 et μ. Par suite, appelant R_n le dernier terme du développement précédent, on aura deux cas à distinguer :

1° Si les limites μ_1 et μ ont le même signe, on pourra écrire

$$(1)\qquad \mathrm{R}_{1n}=\frac{\mu^n-\mu_1^n}{1.2\ldots n}\mathrm{F}^n[\mu_1\theta+\mu(1-\theta)],$$

θ étant une quantité positive comprise entre 0 et 1, introduite par la substitution à x de $\mu_1+\theta(\mu-\mu_1)$;

2° Si les limites sont de signes contraires, on remarquera que

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{R}_n&=\int_{\mu_1}^{0}\mathrm{F}^n(\mu_1+\mu-x)\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}dx\\
&\quad+\int_{0}^{\mu}\mathrm{F}^n(\mu_1+\mu-x)\frac{x^{n-1}\,dx}{1.2\ldots(n-1)},
\end{aligned}\right.$$

ce qui donnera, en appelant θ_1 et θ deux coefficients indépendants compris entre o et 1,

$$R_{2n} = \frac{1}{1.2\ldots n} \times \left\{ \mu^n F^n[\mu_1 + \mu(1-\theta)] - \mu_1^n F^n[\mu + \mu_1(1-\theta_1)] \right\}.$$

Donc finalement, représentant par R_n la forme générale du reste, en laissant au lecteur le soin de particulariser suivant les cas, on pourra écrire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) - F(x_0) \\ & = xF'(x_0) - x_0F'(x) + \frac{x^2}{1.2}F''(x_0) - \frac{x_0^2}{1.2}F''(x) \\ & + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x_0) - \frac{x_0^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x) + R_n. \end{aligned} \right.$$

Annulant l'une quelconque des limites, cette formule se réduit à la formule de Maclaurin.

3. L'intégration par partie appliquée à la transformée de l'expression

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(a+x)\,dx,$$

où a est une constante, eût donné la formule suivante :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & F(a+x) - F(a+x_0) \\ & = \frac{x}{1}F'(a+x_0) - \frac{x_0}{1}F'(a+x) + \frac{x^2}{1.2}F''(a+x_0) - \frac{x_0^2}{1.2}F''(a+x) \\ & + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(a+x_0) \\ & - \frac{x_0^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(a+x) + R_n^a. \end{aligned} \right.$$

en indiquant par R_n^a la forme générale des restes précédents dans lesquels on est parti de la forme

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F^n(a+\mu_1+\mu-x)\frac{x^{n-1}\,dx}{1.2\ldots(n-1)},$$

au lieu de

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F^n(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} dx.$$

Annulant dans cette expression l'une quelconque des deux limites, on trouve la série de Taylor; posant $a = 0$, on retrouve la série (1); posant à la fois $a = 0$ avec μ ou $\mu_1 = 0$, on retrouve la série de Maclaurin. Le développement (2) est donc une formule synthétique qui renferme comme cas particuliers les trois formules précédentes.

Remarques. — Le procédé de l'intégration par parties appliqué : 1° à la transformée de $\int_0^{\mu} F'(x)\,dx$ donne directement la série de Maclaurin; 2° à la transformée de $\int_0^{\mu} F'(x + x_0)\,dx$, celle de Taylor.

4. Les développements (1) et (2) sont encore vrais, au cas où la fonction à développer dépend de plusieurs variables indépendantes : les conditions de continuité de la nouvelle fonction restant, bien entendu, les mêmes que ci-dessus.

Soient, par exemple, $F(x, y)$ une fonction de deux variables et t une variable auxiliaire, on peut toujours poser

$$x = ht, \quad y = kt,$$

h et k représentant deux constantes arbitraires; ceci donne

$$F(x, y) = F(ht, kt) = \varphi(t),$$

et aussi

$$F(x_0, y_0) = F(ht_0, kt_0) = \varphi(t_0);$$

par suite

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k\right)^1 = {}_{xy}D^1_{hk}.$$

en posant

$$ {}_{xy}\mathrm{D}^1_{hk} = \frac{d\mathrm{F}}{dx}h + \frac{d\mathrm{F}}{dy}k, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = {}_{xy}\mathrm{D}^2_{hk}, $$

$$ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, $$

$$ \frac{d^n\varphi}{dt^n} = {}_{xy}\mathrm{D}^n_{hk}, $$

d'après la notation symbolique ordinairement usitée.

Cela posé, si nous représentons par $\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}x + \frac{d\mathrm{F}}{dy}y\right)^p$ ou encore par ${}_{xy}\mathrm{D}^p_{xy}$ la $p^{\text{ième}}$ différentielle totale de $\mathrm{F}(x,y)$, dans laquelle on a remplacé dx et dy respectivement par x et y, on pourra évidemment écrire

$$
\begin{aligned}
t\frac{d\varphi}{dt_0} &= {}_{x_0y_0}\mathrm{D}^1_{xy}, & t_0\frac{d\varphi}{dt} &= {}_{xy}\mathrm{D}^1_{x_0y_0},\\
t\frac{d^2\varphi}{dt_0^2} &= {}_{x_0y_0}\mathrm{D}^2_{xy}, & t_0\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= {}_{xy}\mathrm{D}^2_{x_0y_0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, &&\\
t\frac{d^n\varphi}{dt_0^n} &= {}_{x_0y_0}\mathrm{D}^n_{xy}, & t_0\frac{d^n\varphi}{dt^n} &= {}_{xy}\mathrm{D}^n_{x_0y_0}.
\end{aligned}
$$

Remarquons maintenant que nous avons trouvé comme formes du reste de la série (1) suivant les cas,

$$ \mathrm{R}_{1n} = \frac{t^n - t_0^n}{1.2\ldots n}\mathrm{F}[t_0\theta + t(1-\theta)], $$

$$ \mathrm{R}_{2n} = \frac{t^n\mathrm{F}^n[t_0 + t(1-\theta)] - t_0^n\mathrm{F}^n[t + t_0(1-\theta_1)]}{1.2\ldots n}; $$

on aura, d'après les notations qui précèdent, pour former des restes de la nouvelle fonction,

$$ \mathrm{R}_{1n} = \frac{{}_{[x_0\theta+x(1-\theta)]\,[y_0\theta+y(1-\theta)]}\mathrm{D}_{xy} - {}_{[x_0\theta+x(1-\theta)]\,[y_0\theta+y(1-\theta)]}\mathrm{D}_{x_0y_0}}{1.2.3\ldots n} $$

et

$$ \mathrm{R}_{2n} = \frac{{}_{[x_0+x(1-\theta)]\,[y_0+y(1-\theta)]}\mathrm{D}_{xy} - {}_{[x_0(1-\theta_1)+x]\,[y_0(1-\theta_1)+y]}\mathrm{D}_{x_0y_0}}{1.2.3\ldots n}. $$

La série (1), appliquée à $F(x, y)$, donnera donc

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \frac{{}_{x_0y_0}D_{xy} - {}_{xy}D_{x_0y_0}}{1} + \frac{{}_{x_0y_0}D^2_{xy} - {}_{xy}D^2_{x_0y_0}}{1.2}$$
$$+ \dots + \frac{{}_{x_0y_0}D^{n-1}_{xy} - {}_{xy}D^{n-1}_{x_0y_0}}{1.2\dots(n-1)} + R_n.$$

$F(a+x, b+y)$ aurait fourni un développement analogue, et le résultat est tellement évident que nous ne pensons pas devoir insister.

5. Le principe du n° 1 peut trouver d'autres applications intéressantes dans la recherche de certaines intégrales définies. Je me bornerai cependant à énoncer le fait, en faisant toutefois mention de quelques transformations qui peuvent alors être mises en usage et en me bornant à un exemple.

Nous avons trouvé

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x)\,dx.$$

1° Si dans cette formule on suppose $\mu_1 = -\mu$, on aura

$$\int_{-\mu}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{-\mu}^{\mu} F(-x)\,dx.$$

2° Si la fonction $F(x)$ à intégrer se trouvait de la forme

$$f_1(x)f_2(x)f_3(x)\dots f_p(x)f_{p+1}(x)\dots f_n(x),$$

on pourrait évidemment écrire, d'après le principe (1),

$$\int_{\mu_1}^{\mu} f_1(\mu_1 + \mu - x)f_2(\mu_1 + \mu - x)f_3(\mu_1 + \mu - x)\dots$$
$$\times f_p(\mu_1 + \mu - x)f_{p+1}(x)\,dx\dots f_n(x)\,dx$$
$$\int_{\mu_1}^{\mu} f_1(x)f_2(x)f_3(x)\dots f_p(x)f_{p+1}(\mu_1 + \mu - x)\dots$$
$$\times f_n(\mu_1 + \mu - x)\,dx.$$

En particulier, si l'on a l'intégrale

$$(\alpha)\qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

par exemple, on en conclura tout de suite l'équivalence de

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}\,dx.$$

3° La considération de l'intégrale comme une aire plane nous conduit enfin à écrire immédiatement

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu+\mu_1}{2}} F(x)\,dx + \int_{\mu_1}^{\frac{\mu+\mu_1}{2}} F(\mu_1+\mu-x)\,dx,$$

ou indifféremment

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(x)\,dx + \int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(\mu_1+\mu-x)\,dx.$$

Ainsi, par exemple, dans l'intégrale précédente (α), posons

$$p-1=-\tfrac{1}{2},\quad q-1=-\tfrac{1}{2};$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\,dx\\
&=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.
\end{aligned}$$

Prenant la transformée de cette intégrale nouvelle, elle se réduira à

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}} 2\, dx$$
$$= (\arc\sin 2x)_0^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2};$$

d'où, finalement,

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1 - x)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi.$$