NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MANNHEIM

Premiers éléments de la géométrie descriptive

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 433-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__433_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

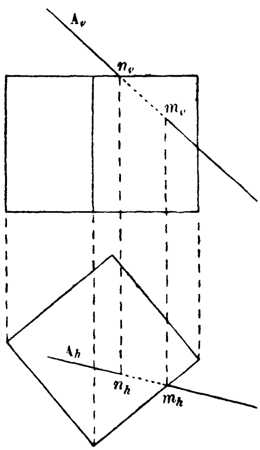
PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR M. A. MANNHEIM.

[SUITE (1)].

Afin de préparer les élèves aux applications et les obliger à lire dans l'espace, il nous paraît utile de placer immédiatement après les problèmes théoriques des

Fig. 9.



problèmes d'application dans lesquels les plans sont les faces d'un corps solide.

Par exemple, le problème précédent peut être complété par le suivant.

APPLICATION. — *Un cube dont une face est horizontale est traversé par une droite. On demande de*

(1) Même Tome, p. 385.

représenter les portions de cette droite qui sont extérieures au cube.

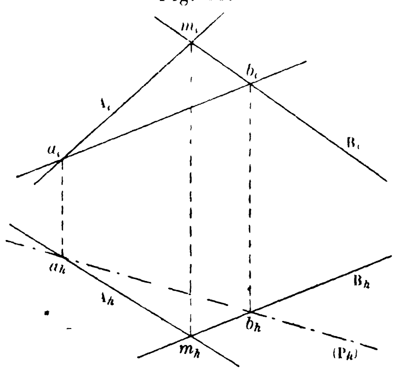
En appliquant la solution du problème théorique, on arrive tout de suite à la solution de celui-ci, comme on le voit sur la *fig.* 9. Le segment caché, figuré par des points, est compris entre les points (m_h, m_v), (n_h, n_v).

Déterminer l'intersection de deux plans dont l'un est quelconque et l'autre perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Le plan arbitraire est donné par deux droites A, B qui se coupent; on a (*fig.* 10) les projections de ces droites. L'autre plan, supposé perpendiculaire au plan horizontal de projection, est projeté suivant (P_h).

En appliquant la solution du problème précédent, nous avons tout de suite le point (a_h, a_v) où la droite A perce le plan vertical donné. De même, pour la droite B,

Fig. 10.



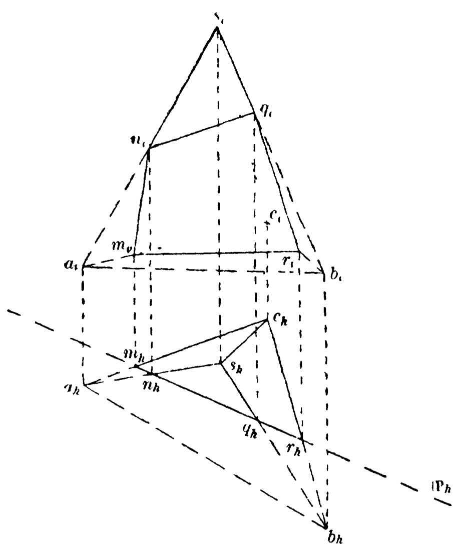
on a le point (b_h, b_v). La droite cherchée, qui est une ligne de front du plan des deux droites A et B, est alors en projection verticale $a_v b_v$.

Application. — *On donne un tétraèdre, on enlève* *la portion de ce solide qui est en avant d'un plan vertical donné. On demande la représentation du solide restant.*

Les sommets du tétraèdre sont dans l'espace s, a, b, c.

Le plan sécant vertical est représenté (*fig.* 11) par la

Fig. 11.



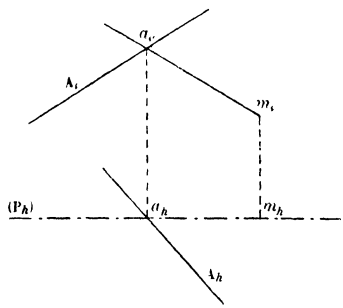
droite (P_h). En appliquant la solution précédente, on a tout de suite le solide représenté sur la figure.

Déterminer une droite de front d'un plan lorsque celui-ci est donné par une droite et un point. — Soient (A_h, A_v) (*fig.* 12) la droite donnée et (m_h, m_v) le point donné. Par le point m_h menons une perpendiculaire à la direction des projetantes.

Cette droite (P_h) représente un plan de front.

Ce plan coupe le plan qui projette horizontalement la droite A suivant une verticale dont la projection horizontale est le point a_h. En menant de ce point une parallèle à la direction des projetantes, on obtient la projection verticale de cette droite. Cette projection ren-

Fig. 12.



contre A_v au point a_v qu'il suffit de joindre au point m_v pour avoir la projection verticale de la droite de front demandée.

De la même manière on détermine une horizontale du plan.

Déterminer le point où une droite donnée rencontre un plan quelconque. — D'une manière générale, on résout ce problème en menant par la droite donnée un plan arbitraire. On prend l'intersection de ce plan et du plan donné : la droite, ainsi déterminée, rencontre la droite donnée au point demandé.

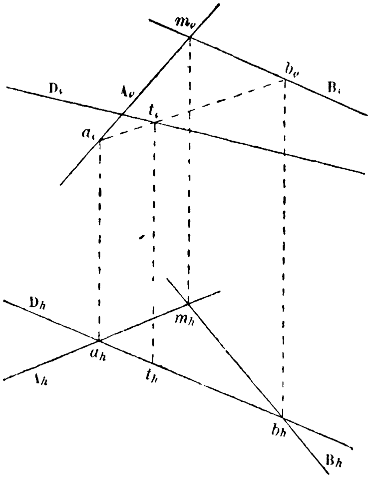
Nous allons prendre le cas particulier où le plan auxiliaire est le plan qui projette horizontalement la droite donnée.

Soient représentées (*fig.* 13) les projections des deux droites A et B qui déterminent le plan donné, et les projections de la droite donnée D.

Considérons la droite D_h comme la projection d'un plan vertical. Ce plan coupe la droite A au point (a_h, a_v)

et la droite B au point (b_h, b_v). Il coupe donc le plan donné suivant une droite dont la projection verticale est $a_v b_v$. Le point t_v où cette droite rencontre D_v est la projection verticale du point cherché.

Fig. 13.



On a alors tout de suite la projection horizontale t_h de ce point.

Nous n'avons pas indiqué que la droite donnée est cachée par le plan à partir du point où elle le rencontre, parce que dans un problème théorique il n'y a pas lieu de faire la distinction entre les parties vues et les parties cachées, à moins que l'on n'indique de quel côté du plan se trouve le solide dont il est une des faces.

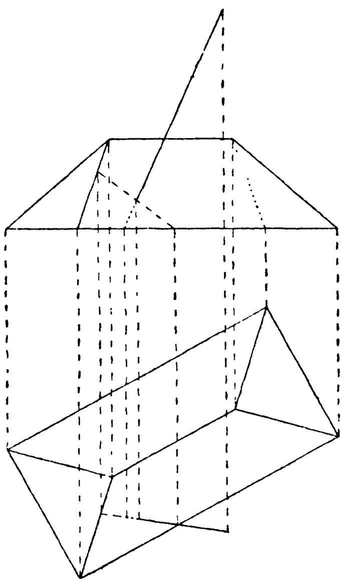
Aussi, en admettant cette manière de faire, est-il indispensable d'ajouter une application.

Application. — *Une perche pénètre dans un tas de sable placé obliquement; déterminer le point où elle* *rencontre l'une des faces de ce tas de sable et figurer la partie cachée de cette perche.*

Il suffit de regarder la *fig.* 14 pour comprendre la solution de ce problème.

Déterminer l'intersection de deux plans qui sont respectivement donnés par leurs traces sur un plan de front et leurs traces sur un plan horizontal. — Soient

Fig. 14.



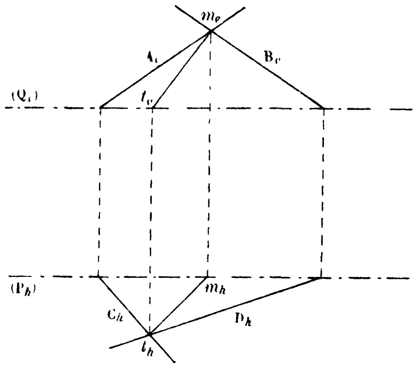
A_v et B_v les traces des plans donnés sur le plan de front (P_h), et C_h, D_h leurs traces sur le plan horizontal (Q_v).

Le point m_v où se rencontrent A_v, B_v appartient à l'intersection cherchée.

La projection horizontale de ce point est en m_h sur (P_h); joignons ce point au point de rencontre t_h des droites C_h, D_h et nous avons la projection horizontale de l'intersection demandée. La projection verticale de cette droite est $m_v t_v$.

Cette solution est simple, parce que les données sont très particulières. En général, on détermine l'intersection de deux surfaces en les coupant par des surfaces auxiliaires choisies de façon que les projections de leurs

Fig. 15.



lignes d'intersection avec les surfaces données soient simples et faciles à construire.

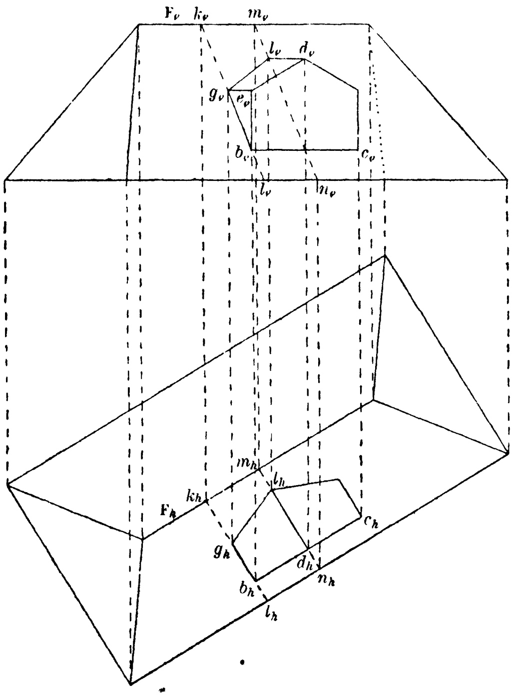
Dans le problème précédent le plan horizontal (Q_v) et le plan de front (P_h) jouent le rôle de surfaces auxiliaires.

Si les plans, dont on demande l'intersection, étaient donnés, l'un au moyen de deux droites A, B, l'autre au moyen de deux droites C, D, on pourrait prendre comme surfaces auxiliaires les plans qui projettent horizontalement ces deux dernières droites. On serait alors conduit à appliquer la solution d'un des problèmes précédents.

Application. — *Intersections de la toiture d'une fenêtre et de la toiture d'une maison.*

On a (*fig.* 16) les projections de la toiture de la maison. Le plan vertical qui contient l'ouverture de la fenêtre se projette horizontalement suivant la droite $b_h c_h$ qui est parallèle à l'un des côtés du rectangle de la toiture. La largeur de la fenêtre est donnée par le segment $b_h c_h$. Par le point b_h menons un plan vertical perpendiculairement à l'horizontale $b_h c_h$. Ce plan coupe le plan de la toiture suivant la droite $(k_h l_h, k_v l_v)$. La verticale b_h a alors pour projection verticale $b_v e_v$ et le plan vertical

Fig. 16.

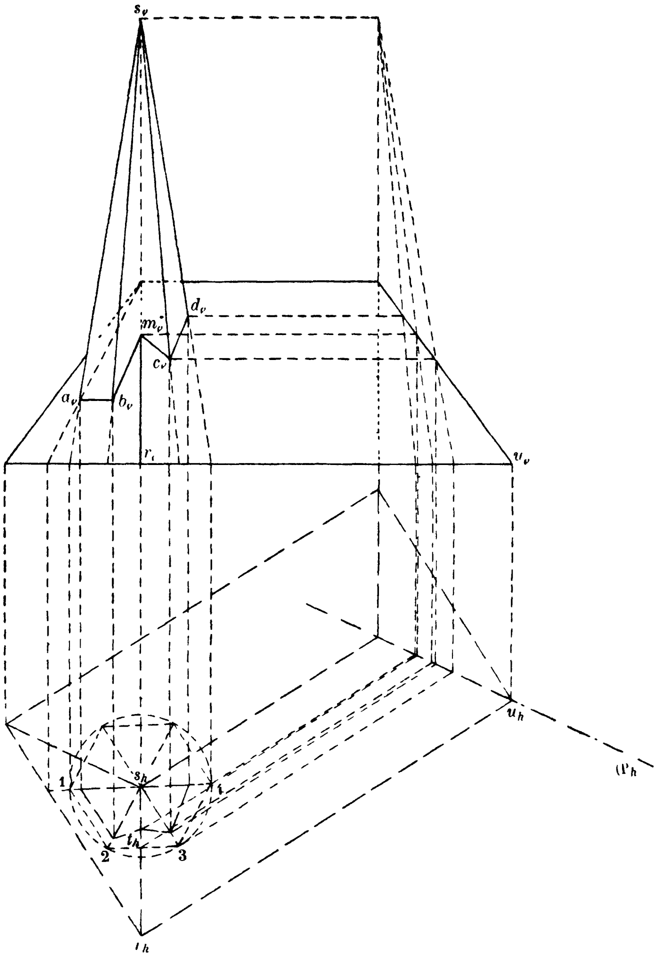


qui contient l'ouverture de la fenêtre coupe le plan de la toiture suivant l'horizontale $b_v c_v$.

La hauteur de la fenêtre étant supposée donnée, on achève facilement sa représentation, comme on le voit sur la figure.

APPLICATION. — *Intersections des faces d'un clocher avec la toiture du bâtiment qui le supporte.*

Fig. 17.



On donne les projections : de la toiture du bâtiment, de la base de la pyramide qui forme le clocher et du sommet du clocher.

Cette base 1, 2, 3, 4,... de la pyramide est tracée dans le plan horizontal qui contient les arêtes inférieures de la toiture. Pour avoir le point où l'arête du clocher $s_h\,1$ rencontre le plan de la toiture nous avons employé comme plan auxiliaire le plan vertical qui projette horizontalement cette droite.

On trouve ainsi le point a_v; de même on détermine le point b_v; la droite $a_v b_v$ est du reste horizontale.

La face $2 s_h 3$ de la pyramide est rencontrée par l'une des arêtes de la toiture.

Si nous supposons cette arête dans un plan perpendiculaire au plan vertical, la construction précédente n'est plus applicable. Pour l'effectuer, on peut projeter obliquement les lignes de cette construction sur un plan vertical auxiliaire. C'est ainsi qu'est faite la figure au moyen du plan vertical auxiliaire (P_h) et de projetantes auxiliaires parallèles à l'horizontale $r_h\,u_h$. On peut employer la même projection oblique pour construire les points de rencontre des arêtes $s_h\,3$, $s_h\,4$ avec le plan de la toiture. Les intersections des faces du clocher avec les plans de la toiture sont en projection verticale les lignes $a_v b_v$, $b_v m_v$, $m_v c_v$, $c_v d_v$. Nous n'avons pas achevé le tracé de la projection horizontale pour ne pas compliquer la figure [1].

PROBLÈMES MÉTRIQUES.

Les grandeurs à mesurer sont ou des segments de droite ou des angles. Dans chacun de ces cas on amène

---

(1) J'ai indiqué l'emploi d'une projection oblique, il serait bon d'exposer ici *la methode des projections obliques* pour la recherche des ombres.

le segment ou le plan de l'angle à être parallèle à l'un des plans de projection. Le segment ou l'angle se projette alors, sans altération de grandeur, et il peut être mesuré sur le plan de projection. On est ainsi conduit à résoudre le problème : *Amener un plan à être parallèle à l'un des plans de projection.* Pour cela il suffit de le faire tourner autour d'une droite de ce plan parallèle à ce plan de projection.

Nous allons d'abord prendre le cas particulier où le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection. Si nous supposons que ce plan est, par exemple, le plan vertical qui projette horizontalement un segment de droite donnée, la solution renferme aussi celle du problème suivant : *Déterminer la grandeur* [1] *d'un segment de droite donné par ses projections.*

Soient $a_h b_h$, $a_v b_v$ (*fig.* 18) les projections du segment donné. Le plan qui le projette horizontalement est (P_h). Pour amener ce plan à être parallèle au plan vertical de projection, faisons-le tourner autour de la verticale a_h. Après la rotation, le plan (P_h) se projette horizontalement suivant la droite (P'_h), qui est perpendiculaire à la direction des projetantes. Le point b de ce plan décrit un arc de circonférence qui est horizontal. Cet arc se projette alors verticalement suivant la droite $b_v b'_v$ perpendiculaire à la direction des projetantes.

Sa projection horizontale est l'arc de cercle $b_h b'_h$ dont le centre est a_h et le rayon $a_h b_h$. Les nouvelles projections du point b après la rotation du plan (P_h) sont b'_h, b'_v. La nouvelle projection verticale $a_v b'_v$ du segment donné permet de mesurer la grandeur de ce segment.

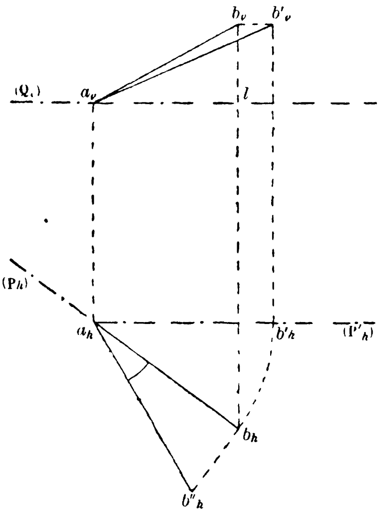
On peut amener le plan (P_h) à être horizontal. Pour

---

[1] Nous n'adoptons pas l'expression de *vraie grandeur* généralement en usage.

cela il suffit de le faire tourner autour d'une de ses horizontales. Sur la figure nous avons pris comme axe de rotation l'horizontale qui passe par le point a. La nouvelle projection horizontale du point b après la rotation est b''_h. La grandeur du segment donné est alors $a_h b''_h$. Nous ne développons pas davantage cette deuxième solution qui, ainsi que la première, donne l'angle que le

Fig. 18.



segment donné fait avec le plan horizontal de projection.

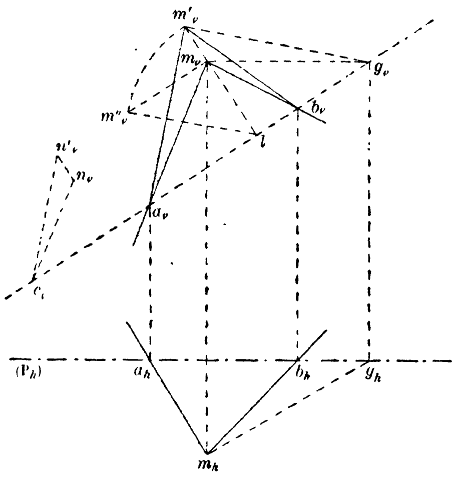
Si l'on veut déterminer l'angle que ce segment fait avec le plan vertical de projection, on doit amener le plan de cet angle, c'est-à-dire le plan qui projette verticalement le segment donné, à être parallèle à l'un ou à l'autre des plans de projection.

Arrivons au cas général ; nous allons faire usage du lemme suivant, que je me borne à énoncer :

Un angle droit dont l'un des côtés est parallèle à *l'un des plans de projection se projette sur ce plan suivant un angle droit.*

Soient $a_h m_h$, $a_v m_v$ (*fig.* 19) les projections d'une droite et $b_h m_h$, $b_v m_v$ les projections d'une autre droite qui rencontre la première. Ces deux droites déterminent

Fig. 19.



un plan que nous nous proposons *d'amener à être de front,* c'est-à-dire parallèle au plan vertical de projection.

L'axe de rotation est alors une droite de front de ce plan. Pour construire cet axe nous employons, comme on le voit sur la figure, le plan de front (P_h).

Le point m, en tournant autour de l'axe $a_v b_v$, décrit un arc dont le rayon est la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite. La projection verticale de ce rayon est, en vertu du lemme précédent, la perpendiculaire $m_v l$ abaissée du point m_v sur $a_v b_v$. Après la rotation du plan donné, cette droite reste perpendiculaire à $a_v b_v$ et la nouvelle projection verticale du point m est alors sur cette même perpendiculaire à une distance du point l égale à la longueur du segment compris entre le point m et le point l : nous avons indiqué sur la figure une des constructions permettant de déterminer cette longueur.

On la porte depuis le point l jusqu'au point m''_v. Ce point est la nouvelle projection verticale du point m, après la rotation du plan. En le joignant aux points a_v, b_v, on a les nouvelles projections verticales des droites données, après la rotation du plan.

Soit n_v la projection verticale d'un point du plan donné; pour avoir la nouvelle projection verticale de ce point, après la rotation du plan, il suffit de construire un triangle $n_v c_v n'_v$ semblable au triangle $m_v a_v m'_v$.

Inversement, si l'on donne la projection n'_v d'un point du plan supposé de front, on a la nouvelle projection de ce point, lorsque le plan est replacé dans la position qu'il doit avoir, toujours par la construction d'un triangle semblable à un triangle ayant deux sommets en m_v, m'_v et dont le troisième sommet est un point de la droite $a_v b_v$.

Le problème que nous venons de résoudre donne la solution de cette question : *Déterminer l'angle compris entre deux droites*. On a, en effet (*fig.* 19), l'angle $a_v m'_v b_v$ qui est l'angle compris entre les deux droites données.

Au lieu d'amener un plan à être de front, on peut l'amener à être horizontal au moyen de constructions tout à fait analogues aux précédentes.

Voici encore comment on peut résoudre le problème précédent. Par le point m menons une horizontale du plan donné. Les projections de cette droite sont (*fig.* 19) $m_v g_v$, $m_h g_h$. La grandeur du segment compris entre les points m et g est $m_h g_h$, puisque ce segment est horizontal. En décrivant alors avec ce segment pour rayon un arc de cercle dont le centre est au point g_v, on obtient le point m'_v à la rencontre de cet arc avec la perpendiculaire lm_v.

Le lemme dont nous venons de faire usage conduit immédiatement à cette conséquence : *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection verticale est perpendiculaire à une droite de front de ce plan*, *et sa projection horizontale est perpendiculaire à une horizontale du plan.*

Il est donc facile de tracer les projections d'une droite perpendiculaire à un plan. On détermine alors simplement *la distance d'un point à un plan et l'angle d'une droite et d'un plan.*

Je ne développe pas les solutions de ces questions, parce que les modifications que je propose dans ce court exposé ne changent pas les solutions généralement adoptées.

Déterminer l'angle de deux plans. — Pour exposer la solution de ce problème, on peut prendre les deux projections d'un tétraèdre et chercher l'angle compris entre deux faces.

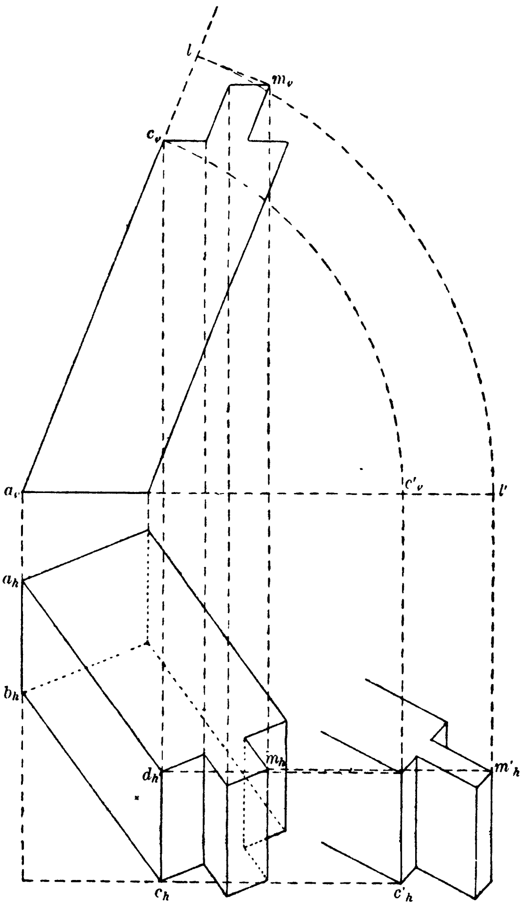
On coupe ces deux faces par un plan horizontal ; on obtient ainsi deux horizontales et au moyen de ces droites on achève la solution comme on le fait ordinairement en employant les traces horizontales des deux plans pour lesquels on cherche l'angle compris.

A la suite de ces problèmes théoriques, il sera très utile de présenter quelques-unes des applications que l'on rencontre dans la pratique.

En voici une analogue à celles que l'on a à traiter en charpente.

Application. — *Une pièce de bois est terminée par* *un tenon : déterminer la nouvelle projection de cette pièce lorsqu'on la fait tourner de façon que l'une de ses faces soit horizontale.*

Fig. 20.



Les projections de la pièce montrent (*fig.* 20) comment elle est placée par rapport aux plans de projection.

Supposons que la face $a_h b_h c_h d_h$ soit amenée à être horizontale après avoir tourné autour de son horizontale $a_h b_h$. Le point c de cette face a pour projections, après la rotation, c'_v, c'_h. Cherchons les nouvelles projections d'un point entraîné et qui n'appartient pas au plan de la face $a_h b_h c_h d_h$. Prenons, par exemple, le point (m_h, m_v) qui appartient au tenon. De ce point abaissons une perpendiculaire sur le plan de la face $abcd$. La projection verticale de cette perpendiculaire est la perpendiculaire $m_v l$ abaissée du point m_v sur $a_v c_v$ et la projection horizontale est la perpendiculaire abaissée du point m_h sur $a_h b_h$. Le pied de cette perpendiculaire est le point l. Ce point appartenant à la face $abcd$, on trouve, comme pour le point c, ce qu'il devient après la rotation de la pièce de bois.

Mais la perpendiculaire $m_v l$ à la face $abcd$ se projette en un seul point lorsque la rotation est effectuée. Par conséquent la construction faite pour le pied de la perpendiculaire abaissée du point m sur la face $abcd$ donne le point m'_h, nouvelle projection horizontale du point m après la rotation. On opère de la même manière pour les autres points de la figure.

Telle est une des applications que l'on peut proposer parmi beaucoup d'autres.

Il est indispensable de laisser aux élèves le soin de faire toutes ces applications après leur avoir expliqué seulement les problèmes théoriques.

On n'arrive à bien savoir la Géométrie descriptive que par l'emploi souvent répété de ces procédés. Indépendamment des épures faites à la règle et au compas, on ne saurait trop recommander l'usage des croquis à main levée. Du reste, il est toujours utile, avant de commencer une épure, de faire un choix convenable des données en essayant de voir à l'avance, au moyen de croquis, si les résultats se présenteront de façon à permettre une lecture facile de l'épure. La Géométrie descriptive n'a pas, en effet, simplement pour objet de représenter les corps sur une feuille de dessin, mais de faire cette représentation de façon que la restitution soit facile.