NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 419-431
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__419_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1322

(voir 2e série, t. XVIII, p. 383);

PAR M. H.-J. KRANTZ, à Bréda.

Démontrer que $\sqrt{5}$ *est la limite du rapport des deux séries*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{34^2}+\frac{1}{89^2}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{4}{21}+\frac{5}{55}-\frac{6}{144}+\cdots.$$

(ÉDOUARD LUCAS.)

En désignant, d'une manière générale, par Y_x et U_x les dénominateurs des termes des deux séries, on a, entre les dénominateurs de trois termes successifs, les relations

$$Y_{x+2}-3Y_{x+1}+Y_x=0,$$

$$U_{x+2}-3U_{x+1}+U_x=0.$$

On y satisfait par

$$Y_x = C_1 a^x + \frac{C_2}{a^x},$$

$$U_x = C'_1 a^x + \frac{C'_2}{a^x};$$

a et $\frac{1}{a}$ étant les racines de l'équation

$$(1) \qquad p^2 - 3p + 1 = 0.$$

Les constantes sont déterminées par les conditions

$$C_1 a + \frac{C_2}{a} = 1, \quad C_1 a^2 + \frac{C_2}{a^2} = 2,$$

$$C'_1 a + \frac{C'_2}{a} = 1, \quad C'_1 a^2 + \frac{C'_2}{a^2} = 3;$$

d'où, en observant que $a + \frac{1}{a} = 3$,

$$C_1 = \frac{C_2}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}a},$$

$$C'_1 = - C'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donc le terme général T_x de la première série devient

$$T_x = \frac{5a^{2x-1}}{(a^{2x-1}+1)^2},$$

et le terme de la seconde série, suivant que x est un nombre impair ou pair,

$$T'_x = \pm \frac{x a^x \sqrt{5}}{a^{2x} - 1}.$$

On a donc, en désignant par S et S′ les sommes des séries proposées,

$$S = 5a\left[\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a^3+1)^2} + \frac{a^4}{(a^5+1)^2} + \dots\right],$$

$$S' = a\sqrt{5}\left(\frac{1}{a^2-1} - \frac{2a}{a^4-1} + \frac{3a^2}{a^6-1} + \dots\right).$$

En prenant pour a la racine de l'équation (1), qui est plus grande que l'unité, on peut développer tous les termes de S' en séries convergentes. De cette manière, on trouve

$$S' = a\sqrt{5}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \ldots \\ -\frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^7} - \frac{2}{a^{11}} - \frac{2}{a^{15}} - \ldots \\ +\frac{3}{a^4} + \frac{3}{a^{10}} + \frac{3}{a^{16}} + \frac{3}{a^{22}} + \ldots \\ -\frac{4}{a^5} - \frac{4}{a^{13}} - \frac{4}{a^{21}} - \frac{4}{a^{29}} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Maintenant, on peut aisément ajouter tous les termes de S' qui sont placés dans une même ligne verticale, et de cette manière on retrouve les termes successifs de S, que nous avons mis entre les crochets.

On a, par exemple,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} - \frac{4}{a^5} + \ldots = \frac{1}{(a+1)^2}, \\ &\frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^7} + \frac{3}{a^{10}} - \frac{4}{a^{13}} + \ldots = \frac{a^2}{(a^3+1)^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a enfin

$$\frac{S}{S'} = \sqrt{5}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et de Virieu.

Question 1369

(voir 2e série, t. XX, p. 382);

PAR M. MORET-BLANC.

Par le centre d'un ellipsoïde, on mène trois plans rectangulaires quelconques A, B, C; *si l'on nomme* α, β, γ *les angles que forment ces plans avec un plan diamétral fixe* P; a, b *les axes de la section de la surface par le plan* P; a_1, b_1, c_1 *les demi-diamètres de cette section dirigés suivant les droites* (A, P), (B, P), (C, P), *on aura*

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2} + \frac{\sin^2\beta}{b_1^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

(GENTY.)

Prenons les axes de la section diamétrale P pour axes des x et des y, et la perpendiculaire à ces axes menée par le centre O de l'ellipsoïde pour axe des z. L'équation de la section diamétrale (P) sera

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Soient

$$(\mathrm{A}) \qquad mx + ny + z\cos\alpha = 0,$$
$$(\mathrm{B}) \qquad m_1x + n_1y + z\cos\beta = 0,$$
$$(\mathrm{C}) \qquad m_2x + n_2y + z\cos\gamma = 0$$

les équations des trois plans A, B, C, avec les relations

$$m^2 + n^2 + \cos^2\alpha = 1, \quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 1,$$
$$m_1^2 + n_1^2 + \cos^2\beta = 1, \quad n^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1,$$
$$m_2^2 + n_2^2 + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

d'où

$$\sin^2\alpha = m^2 + n^2,$$
$$\sin^2\beta = m_1^2 + n_1^2,$$
$$\sin^2\gamma = m_2^2 + n_2^2,$$

résultant de ce que les trois plans A, B, C, ainsi que les plans de coordonnées, sont rectangulaires.

Les coordonnées x_1, y_1 de l'extrémité du demi-diamètre a_1 sont déterminées par les deux équations

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$mx + ny = 0;$$

on en tire

$$x_1^2 = \frac{a^2b^2n^2}{a^2m^2 + b^2n^2}, \quad y_1^2 = \frac{a^2b^2m^2}{a^2m^2 + b^2n^2},$$

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2b^2(m^2 + n^2)}{a^2m^2 + b^2n^2} = \frac{a^2b^2\sin^2\alpha}{a^2m^2 + b^2n^2},$$

d'où

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2} = \frac{a^2m^2 + b^2n^2}{a^2b^2};$$

de même,

$$\frac{\sin^2\beta}{b_1^2} = \frac{a^2m_1^2 + b^2n_1^2}{a^2b^2},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{c_1^2} = \frac{a^2m_2^2 + b^2n_2^2}{a^2b^2}.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et ayant égard aux relations

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 1,$$
$$n^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1,$$

il vient

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2} + \frac{\sin^2\beta}{b_1^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c_1^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

C. Q. F. D.

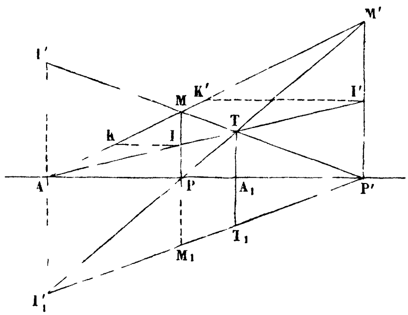
Question 1370

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 383).

PAR M. N. GOFFART.

Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes AA_1 *et* BB_1; *par l'un des sommets réels* A *passe une sécante* AMM', *et les tangentes en* M *et* M' *se rencontrent en* T : *on demande de construire les deux courbes connaissant les points* A, M, T. (LAISANT.)

Les courbes données sont les coniques supplémentaires de Poncelet. Rappelons leurs propriétés. Les courbes étant rapportées à leurs axes, la droite AMM'



coupe les courbes en des points M, M' dont les abscisses sont liées par la relation

$$xx' = a^2.$$

En conséquence, si P et P' sont les pieds des ordonnées des points M et M', il en résulte que MP' et M'P sont respectivement les tangentes en M et M' à l'ellipse et à l'hyperbole, respectivement. Le lieu des points de concours T de ces tangentes est la tangente commune au sommet A_1; de même que la tangente au sommet A est le lieu des points de concours de l'une des tangentes et de la symétrique de l'autre sur l'axe.

Telles sont les propriétés connues, qu'on vérifie du reste aisément sur les équations (1). Il en résulte que A étant milieu de $T'T'_1$, I et I' sont respectivement les milieux de MP et de M'P'. Donc, si par ces points on mène des parallèles à l'axe AA_1, les points K et K' seront les milieux de AM et de AM', en même temps que les angles MIK et M'I'K' seront droits. En résumé, lorsqu'on donne A, T et M ou A, T et M', on trouve I ou I', par l'intersection de AT avec la circonférence décrite sur KM ou sur K'M' comme diamètre. Le point I ou I' détermine le point P ou P', et, par suite, la direction AP ou AP' de l'axe. Le second sommet A_1 résulte de l'intersection de cette droite AP ou AP' avec la circonférence décrite sur AT comme diamètre. L'une ou l'autre courbe est donc définie élémentairement par l'axe et une tangente avec son point de contact.

Il y a, en général, deux points I ou deux solutions,

(1) D'après une proposition bien connue, on a, en désignant par $2a$ et $2b$ les axes de l'ellipse, $\frac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{AP}.\mathrm{A_1P}} = \frac{b^2}{a^2}$. L'hyperbole ayant les mêmes axes $2a$, $2b$ que l'ellipse, on a aussi

$$\frac{\mathrm{M'P'}^2}{\mathrm{AP'}.\mathrm{A_1P'}} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{M'P'}^2} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP'}}.\frac{\mathrm{A_1P}}{\mathrm{A_1P'}},$$

et, parce que $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P'}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP'}}$, il vient $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP'}} = \frac{\mathrm{A_1P}}{\mathrm{A_1P'}}$;

donc les quatre points A, A_1, P, P' sont conjugués harmoniques, et par conséquent les droites MP' et M'P sont respectivement tangentes en M et M' à l'ellipse et à l'hyperbole.

D'autre part, on sait que la droite TA, menée du point d'intersection T des diagonales d'un trapèze MPP'M' au point de rencontre A des côtés non parallèles, passe par les milieux I, I' des deux bases, et qu'en outre les quatre points A, T, I, I' sont, comme A, A_1, P, P', conjugués harmoniques; il en résulte évidemment que la droite TA_1 est parallèle aux bases du trapèze, et, par suite, perpendiculaire à l'axe AA_1 au sommet A_1. (G.)

et le problème n'est possible que si

$$\frac{3}{4}\,\mathrm{AM}\sin\mathrm{TAM} \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{AM} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4}\,\mathrm{AM}\sin\mathrm{TAM}' \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{AM}',$$

c'est-à-dire

$$\sin(\mathrm{TAM} \text{ ou } \mathrm{TAM}') \leqq \frac{1}{2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez et Moret-Blanc.

Question 1378

(voir 2e série, t. XX, p. 527);

PAR M. S. RÉALIS.

L'équation

$$x^4 + 12\alpha\beta(\alpha+\beta)x + 2\alpha\beta(4\alpha^2 - 9\alpha\beta + 4\beta^2) = 0,$$

dans laquelle α *et* β *sont des entiers différents de zéro, n'a pas de racine entière.* (S. RÉALIS.)

L'équation proposée peut s'écrire

$$(x+\alpha)^4 + (x+\beta)^4 = [x^2 + 2(\alpha+\beta)x + \alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2]^2,$$

où l'on voit, d'après un théorème connu, qu'elle ne peut être vérifiée par des valeurs entières de α, β, x.

Note. — La même question a été résolue par MM. Borletti; Moret-Blanc; Henri Cartier.

Question 1381

(voir 2e série, t. XX, p. 527);

PAR M. HENRI CARTIER,
Élève du lycée d'Angoulême.

On donne une circonférence et deux points A, B, *extérieurs à cette courbe. Par le point* B, *on mène une* *corde quelconque* MN, *et du point* A *les droites* AM, AN *qui coupent, respectivement, la circonférence en* P *et* Q. *Démontrer que :*

1° *La droite* PQ *rencontre* AB *en un point qui reste fixe lorsque la sécante* BMN *tourne autour du point* B;

2° *Le lieu géométrique du point d'intersection des perpendiculaires menées aux droites* AM, AN, *aux points* M, N, *est une droite perpendiculaire à* AB.

(Domenico Montesano.)

1° Prolongeons les droites PQ et MN jusqu'à leur rencontre en C ([1]), et dans le quadrilatère inscrit MNPQ menons les diagonales PN, QM qui se coupent au point D. La droite CD est la polaire du point A par rapport à la circonférence considérée. Donc CD est une droite fixe qui rencontre AB en un point fixe E, quelle que soit la direction de la sécante BMN.

La droite CD est aussi la polaire du point A, par rapport à l'angle MCP; donc, en désignant par i le point d'intersection des droites CP et AB, les points B et i sont conjugués harmoniques de A et E; mais les trois points A, B, E sont fixes; par conséquent, il en est de même du point i de rencontre des droites PQ et AB.

Nota. — Cette première partie de la question proposée est d'ailleurs une conséquence de cette proposition plus générale :

Si un quadrilatère inscrit dans une conique se déforme de telle manière que trois de ses côtés tournent autour de trois points fixes en ligne droite, le quatrième côté tourne aussi autour d'un point fixe de la même droite.

Cette proposition existe encore lorsque deux des trois

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

points viennent se confondre en un seul; on le démontrerait comme précédemment.

2° Soit J le point d'intersection des perpendiculaires menées aux droites AM, AN, aux points M, N. Les quatre points A, M, N, J appartiennent à la circonférence, qui a AJ pour diamètre. Cette circonférence coupe la droite AB en un point K déterminé par l'égalité

$$BK \times BA = BM \times BN:$$

donc le point K est fixe sur la droite AB, et le lieu du point J est la perpendiculaire menée à AB au point K.

Nota. — La même question a été résolue par MM. J. Pisani; Moret-Blanc; Borletti; P., au lycée de Toulouse; Domenico Montesano.

Question 1383

(voir 3e série, t. I, p. 128),

PAR M. LEZ.

On donne sur un plan une circonférence de centre O *et un point fixe* C.

On prend un triangle rectangle ACB *dont le sommet de l'angle droit est en* C *et dont l'hypoténuse est tangente en* A *à la circonférence donnée. On abaisse du sommet une perpendiculaire sur* AB; *cette perpendiculaire rencontre* AB *au point* H, *et elle rencontre en* I *la perpendiculaire abaissée de* B *sur* OC. *Démontrer que, quelle que soit la position de* ACB, *la quantité* $\frac{1}{CH} \pm \frac{1}{CI}$ *est constante. On prend le signe* — *lorsque* H *et* I *sont d'un même côté par rapport à* C.

(MANNHEIM).

Soit D le point où l'hypoténuse AB rencontre la ligne qui joint le centre O au point C (¹); les droites OA, CH étant perpendiculaires à AB, les triangles ODA, CDH sont semblables, et l'on a

$$(1) \qquad \frac{1}{CH} = \frac{AD}{OA.HD}.$$

La droite DI étant une des hauteurs du triangle, BDC est perpendiculaire à BC et parallèle à AC; par suite, les triangles semblables DHI, AHC fournissent la proportion

$$(2) \qquad \frac{HA}{HD} = \frac{HC}{HI}.$$

Quelle que soit donc la position du point C par rapport à la circonférence O, le point D détermine sur AH, comme le point I sur CH, deux segments additifs ou soustractifs.

En effet, la proportion (2) donne

$$\frac{HA}{HD \pm HA} = \frac{HC}{HI \pm HC} \quad \text{ou} \quad \frac{HA}{AD} = \frac{HC}{CI};$$

mais, à cause de l'égalité (1), on a

$$\frac{1}{CI} = \frac{HA}{HC.AD} = \frac{HA}{OA.HD}.$$

Par suite, suivant que $HD = AD \pm HA$, la somme ou la différence des inverses $\frac{1}{CH}$, $\frac{1}{CI}$ est constante et égale à l'inverse du rayon $\frac{1}{OA}$.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Quand $HD = AD + HA$, le sommet C est évidemment entre H et I.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pisani; Moret-Blanc; N. Goffart; Victor Strékalof; Domenico Montesano; Paul Boulogne, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas).

Question 1400

(voir page 239).

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un triangle ABC, *et un point quelconque* O. *On prend les symétriques* a, b, c *de ce point par rapport aux milieux de* BC, AC, AB. *Démontrer :* 1° *que les droites* Aa, Bb, Cc *concourent en un même point* P; 2° *que la droite* OP *tourne autour d'un point fixe* E *lorsque le point* O *se meut d'une manière quelconque ;* 3° *que le point* E *divise* OP *dans un rapport constant.*

(D'OCAGNE.)

1° Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés BC, AC, AB.

D'après la construction la droite ab est parallèle à (A_1B_1) et égale à $2A_1B_1$; elle est donc égale et parallèle à AB, mais de sens contraire.

De même ac et bc sont respectivement égales, parallèles et de sens contraire à AC et BC. Les trois couples de parallèles AB et ab, AC et ac, BC et bc forment trois parallélogrammes dont les diagonales Aa, Bb, Cc se coupent en un point P milieu de chacune d'elles.

2° La ligne OP, médiane du triangle OAa, coupe la médiane AA_1 aux deux tiers de sa longueur à partir du point A; donc elle passe par le point fixe E, point de concours des médianes du triangle ABC;

3° Elle est divisée par ce point en deux segments dont le rapport $\frac{OE}{EP} = \frac{2}{1}$.

Remarque. — Le point O peut être situé d'une manière quelconque dans l'espace.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ahetroë, et Odille Tors, au lycée de Nancy.

M. le colonel A. Mathieu en a donné une solution analytique très simple, au moyen des coordonnées trilinéaires.