NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEZ

Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 410-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__410_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1881;

PAR M. H. LEZ.

1. *On donne un cône de révolution, dont la génératrice* SA *fait avec l'axe* SO *un angle* β, *et une ellipse dont les demi-axes sont* a *et* b:

1° *Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue en coupant le cône par un plan convenablement déterminé;*

2° *Si* AB *est la trace du plan sécant sur le plan méridien* ASB *qui lui est perpendiculaire, démontrer la relation* $\text{SA}.\text{SB} = \dfrac{b^2}{\sin^2\beta}$;

3° *Calculer en fonction des données* a, b, β, *par des formules logarithmiques, l'angle* SAB, *la portion* SA *de la génératrice, ainsi que l'aire du triangle* SAB.

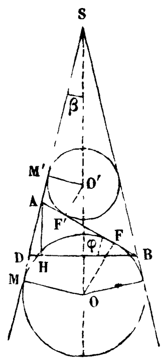
Dans un cône droit circulaire, la section faite par un plan oblique, qui rencontre toutes les génératrices, est une ellipse.

En effet, les sphères ayant mêmes centres et mêmes rayons que les cercles inscrit et exinscrit au triangle SAB touchent le plan sécant AB en deux points F, F′ également distants du milieu de la droite AB; de plus, la somme des distances d'un point quelconque P de la section aux deux points F, F′ est constamment égale à $\text{MM}' = \text{AB} = 2a$.

1° Menant BD perpendiculaire à l'axe SO, on voit que l'angle $\text{ADB} = 90° - \beta$ et que

$$\text{AD} = \text{AM} - \text{DM} = (a + c) - (a - c) = 2c.$$

Or, le triangle DAB sera possible, si $AB > AH$, ou $a > c\cos\beta$, condition remplie par une ellipse; on peut



donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.

2° Le triangle DAB fournit l'égalité

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2\,AD.DB\sin\beta;$$

si l'on fait $DB = 2d$, on a

$$d^2 - 2cd\sin\beta = a^2 - c^2,$$

et

$$d = c\sin\beta \pm \sqrt{a^2 - c^2\cos^2\beta}.$$

Par suite

$$DS = SB = \frac{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2\beta} + c\sin\beta}{\sin\beta},$$

$$AS = DS - 2c = \frac{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2\beta} - c\sin\beta}{\sin\beta},$$

d'où

$$SB.SA = \frac{a^2 - c^2}{\sin^2\beta} = \frac{b^2}{\sin^2\beta}.$$

3° Le triangle DAB donne aussi

$$\frac{2a}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{2c}{\sin\varphi} \quad \text{d'où} \quad \sin\varphi = \frac{c\cos\beta}{a}.$$

Connaissant les angles $ADB = 90^\circ - \beta$, $ABD = \varphi$, on obtient facilement les angles DAB, SAB.

Quant à la surface du triangle SAB, elle est égale à $\frac{SA.SB.\sin 2\beta}{2} = \frac{b^2}{\tang\beta}$.

Reste maintenant à rendre l'expression de AS calculable par logarithmes.

Pour cela, écrivant

$$\sqrt{a^2 - c^2\cos^2\beta} = a\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2\beta} = a\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = a\cos\varphi,$$

on a

$$\begin{aligned} AS &= \frac{a\cos\varphi - c\sin\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta}\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi\sin\beta}{\cos\beta}\right) \\ &= \frac{a\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta.\cos\beta}. \end{aligned}$$

On trouverait de même

$$SB = \frac{a\cos(\varphi - \beta)}{\sin\beta\cos\beta}.$$

2. *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c,$$

les lettres a, b, c, m *désignant des nombres donnés dont le dernier est supérieur ou au moins égal à l'unité.*

Condition de réalité des racines. Limites de c. — En faisant disparaître les radicaux dans l'une des deux égalités

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c, \quad \sqrt{mx + a} - \sqrt{x + b} = c,$$

on obtient le même résultat

$$\begin{aligned} &(m-1)^2x^2 - 2(1+m)c^2x - 2(b-a)(m-1)x \\ &= c^2(2a + 2b - c^2) - (a-b)^2. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation du second degré sont

$$x = \frac{c^2(1+m) + (b-a)(m-1) \pm 2c\sqrt{c^2m - (a-bm)(m-1)}}{(m-1)^2};$$

elles restent réelles si $c^2m \geqq (a - bm)(m-1)$, condition assurément remplie quand $c^2 \geqq (a - bm)$, et toujours si $bm \geqq a$, m étant plus grand que 1. Lorsque $m = 1$, le premier et le troisième terme de l'équation réduite disparaissent, et l'on a $x = \dfrac{(c^2 + b - a)^2 - 4bc^2}{4c^2}$.