NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 40-45

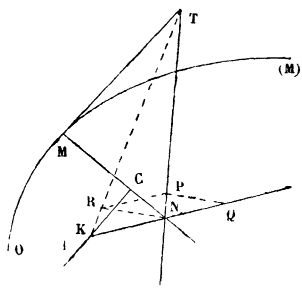
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__40_0>

ÉTUDE SUR UN MODE DE DÉTERMINATION DES COURBES PLANES. APPLICATION CINÉMATIQUE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

1. Sur une courbe quelconque (M) tracée dans un plan, prenons un point fixe O (*fig.* 1). Imaginons un

Fig. 1.



point mobile M se déplaçant d'une façon continue sur la courbe (M), à partir du point O. Pour chaque position du point M tirons la tangente à la courbe (M) et portons sur cette tangente une longueur MT $= l$, fonction de la longueur s de l'arc OM :

$$l = F(s). \tag{1}$$

Nous porterons cette longueur dans le sens du déplacement du point M, ou en sens contraire, suivant qu'elle sera affectée du signe $+$ ou du signe $-$. Le lieu du point T sera une certaine courbe (T), que nous allons étudier.

2. Voyons d'abord comment, connaissant le centre

de courbure en chaque point de la courbe (M), on peut construire la normale à la courbe (T).

Soient $d\theta$ l'angle de contingence de la courbe (M) au point M considéré, C le centre de courbure en ce point, N le point où la normale TN cherchée coupe MC.

Nous avons

$$\frac{dl}{d\theta} = \mathrm{NC}.$$

Or

$$d\theta = \frac{ds}{\mathrm{MC}};$$

par suite,

$$\frac{dl}{\frac{ds}{\mathrm{MC}}} = \mathrm{NC},$$

ou

$$\frac{dl}{ds} = \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{MC}},$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{MC}} = \mathrm{F}'(s). \tag{2}$$

Le point N est ainsi déterminé, et par suite la normale TN.

Remarquons que, dans le cas où l est constant, $\mathrm{F}'(s)$ étant nul, les points N et C se confondent, ce qu'il était facile de voir *a priori*.

Il est aussi assez intéressant de remarquer que, si l'on représente les variations de la fonction $l = \mathrm{F}(s)$ dans un système de deux axes rectangulaires, les s étant portés en abscisses et les l en ordonnées, le rapport $\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{MC}}$, égal à $\mathrm{F}'(s)$, sera donné par le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe représentative.

3. Le rayon de courbure MC = R de la courbe (M) est une fonction de l'arc s :

$$\mathrm{R} = \varphi(s).$$

Nous allons voir comment, dans le cas où l'on connaît la nature de cette fonction, on peut construire le centre de courbure de la courbe (T).

Soit I le centre de courbure actuellement inconnu de la développée de la courbe (M) au point C. L'angle de contingence de cette courbe est aussi $d\theta$. Nous avons

$$\frac{d.\mathrm{MC}}{d\theta} = \mathrm{CI}$$

ou

$$\frac{d\mathrm{R}}{\frac{ds}{\mathrm{R}}} = \mathrm{CI},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{R}} = \varphi'(s).$$

Le point I est ainsi défini. Nous allons maintenant déterminer la normale NK à la courbe décrite par le point N. Pour cela, remarquons que

$$\frac{d.\mathrm{NC}}{d\theta} = \mathrm{KI}.$$

Mais nous avons vu que

$$\frac{dl}{d\theta} = \mathrm{NC};$$

donc

$$\frac{d\mathrm{NC}}{dl} = \frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{NC}}.$$

Or, d'après (2),

$$\mathrm{NC} = \mathrm{MC}.\mathrm{F}'(s) = \varphi(s)\,\mathrm{F}'(s).$$

La relation précédente devient donc

$$\frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{NC}} = \frac{\varphi'(s)\mathrm{F}'(s) + \varphi(s)\mathrm{F}''(s)}{\mathrm{F}'(s)}.$$

Le point K est ainsi déterminé, et par suite la normale NK.

Nous pouvons maintenant chercher le centre de courbure P de la courbe (T) au point T, c'est-à-dire le point où TN touche son enveloppe.

En effet, en appelant Q le point de rencontre de NK et de la perpendiculaire à TN au point P cherché, nous avons, entre les arcs infiniment petits ds, ds_1, ds_2 décrits simultanément par les points M, N, T, les relations suivantes :

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{NK}}, \quad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{TP}}, \quad \frac{ds_2}{ds} = \frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{MC}}.$$

Multipliant ces trois relations membre à membre, nous avons

$$1 = \frac{\mathrm{NQ.TN}}{\mathrm{NK.TP}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{NK}} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{NQ}}.$$

Or, par le point P tirons, parallèlement à NK, PR qui coupe TK en R ; nous avons

$$\frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{NK}} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{PR}}.$$

Par suite,

$$\mathrm{PR} = \mathrm{NQ}.$$

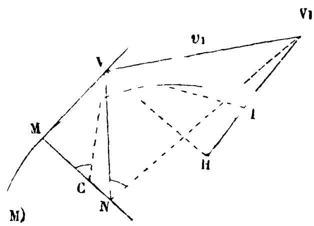
Donc la figure PQNR est un parallélogramme : RN est parallèle à PQ, et, par conséquent, perpendiculaire à TN.

La construction du point P sera donc la suivante : après avoir déterminé, comme nous avons vu, le point I, puis le point K, *on tire* TK, *on élève à* TN *en* N *la perpendiculaire* NR *qui coupe* TK *en* R ; *par* R *on mène, parallèlement à* KN, RP *qui coupe* TN *en* P ; P *est le centre de courbure demandé.*

Application aux mouvements plans.

Nous allons appliquer la théorie précédente à l'étude du mouvement d'un point mobile M sur une courbe plane (M) (*fig.* 2), lorsqu'on suppose ce mouvement

Fig. 2.



réglé par l'équation qui lie la vitesse à l'espace parcouru :

$$v = \varphi(s).$$

Pour chaque position du point mobile portons sur la tangente à la trajectoire la vitesse $MV = v$ et considérons le mouvement du point V.

Soient $d\theta$ l'angle de contingence de la courbe (M), $MC = R$ son rayon de courbure, VN la normale à la trajectoire du point V. On sait, d'après ce qui vient d'être démontré, que

$$\frac{dv}{ds} = \frac{NC}{R},$$

d'où

$$NC = R\frac{dv}{ds}.$$

La normale VN est ainsi déterminée. Tirons alors la tangente et considérons sur cette tangente la vitesse $VV_1 = v_1$ du point V. On sait que

$$\frac{v}{v_1} = \frac{MC}{VN}.$$

Les angles MCV et VNV_1 sont donc égaux, ce qui détermine la vitesse du point V.

Nous allons chercher les composantes de cette vitesse le long de MV et de la perpendiculaire VH à MV.

La similitude des triangles MVN et HV_1V donne

$$\frac{v_1}{VN} = \frac{VH}{MV} = \frac{V_1H}{MN}$$

ou, puisque $\frac{v_1}{VN} = \frac{v}{R}$,

$$\frac{v}{R} = \frac{VH}{v} = \frac{V_1H}{R\left(1 + \frac{dv}{ds}\right)},$$

d'où

$$VH = \frac{v^2}{R}$$

et

$$V_1H = v + v\frac{dv}{ds}.$$

Or

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{v},$$

donc

$$V_1H = v + \frac{dv}{dt},$$

c'est-à-dire que :

1° *La composante* VH *est égale à l'accélération centripète du point* M.

2° *La composante* V_1H *est égale à la somme de la vitesse et de l'accélération tangentielle du point* M.

Portons la longueur $V_1I = VM$; nous aurons

$$HI = \frac{dv}{dt}.$$

Puisque HI est égale à l'accélération tangentielle et VH à l'accélération centripète du point M, VI sera, en grandeur et direction, l'accélération totale de ce point.