NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WALECKI

Équation en S de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 401-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__401_0>

ÉQUATION EN S DE DEGRÉ m ET DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE EN CARRES;

PAR M. WALECKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

Soient D_1 un déterminant de degré m, à éléments réels, et symétrique; D ce qu'il devient quand on diminue d'une indéterminée S les éléments de la diagonale principale.

L'équation $D = 0$ est en S de degré m.

Si D_1 est le discriminant d'une fonction quadratique $f(x, y, \ldots, z)$ de m lettres, D est celui de

$$(1) \qquad f(x, y, \ldots, z) - S(x^2 + y^2 + \ldots + z^2).$$

THÉORÈME. — *L'équation en S n'a pas de racine imaginaire.*

Pour une racine $\alpha + \beta i$ de l'équation en S, la fonction (1) est décomposable en la somme des carrés des fonctions linéaires $A + A'i$, $B + B'i$, $\ldots$, $C + C'i$, dont le nombre est moindre que m, et l'on a

$$\begin{aligned} &f(x, y, \ldots, z) - (\alpha + \beta i)(x^2 + y^2 + \ldots + z^2) \\ &\quad \equiv (A + A'i)^2 + (B + B'i)^2 + \ldots + (C + C'i)^2; \end{aligned}$$

les coefficients de i sont identiques : donc

$$-\beta(x^2 + y^2 + \ldots + z^2) \equiv 2AA' + 2BB' + \ldots + 2CC'.$$

Il existe des valeurs non toutes nulles et réelles des variables qui annulent les polynômes en nombre moindre A, B, $\ldots$, C. Pour ces valeurs, $x^2 + y^2 + \ldots + z^2$ n'est pas nul Il faut donc que β soit nul. C. Q. F. D.

On a supposé α, β, A, B, C, A′, B′, ..., C′ réels (¹).

Une démonstration analogue montre que le discriminant de $f(x, y, \ldots, z) - Sf_1(x, y, \ldots, z)$ ne s'annule que pour des valeurs réelles de S, pourvu que f et f_1 soient à coefficients réels, et que l'un des deux soit décomposable en autant de carrés indépendants et tous positifs qu'il y a de variables.

Condition pour que l'équation en S *ait une racine double.* — La dérivée D′ de D, prise par rapport à S, est la somme, changée de signe, des mineurs symétriques de degré $m - 1$ que l'on peut former dans D; on le voit en traitant D comme une fonction composée de m fonctions qui sont les éléments de la diagonale principale.

Pour arriver aux caractères d'une racine double, j'emploierai les propriétés suivantes des déterminants :

Soient D un déterminant; Δ le déterminant adjoint, qui s'en déduit en substituant dans D_1, à chaque élément, son coefficient dans le développement de D.

Si D est symétrique, Δ l'est aussi.

Si D est nul, les éléments d'une même ligne de Δ sont un système de solutions pour les équations linéaires dont le déterminant est D.

Si D *est nul, tous les mineurs du second degré de* Δ *sont nuls.*

Pour le démontrer, je considère les m équations linéaires dont le déterminant est D, supposé nul.

Le mineur principal est, ou de degré inférieur à $m - 1$, et alors tous les éléments de Δ sont nuls, ou de degré $m - 1$. Dans ce cas, une seule inconnue peut être choisie

---

(¹) J'ai introduit dans mon enseignement une démonstration de ce genre, pour l'équation en S ordinaire, avant les examens de 1881. W.

arbitrairement; deux systèmes de solutions sont composés de valeurs proportionnelles, et il en est ainsi pour deux lignes de Δ. C. Q. F. D.

Je suppose maintenant D symétrique et à éléments réels.

Si D *est nul, les éléments non nuls de la diagonale principale sont de même signe dans* Δ.

En effet, si j'appelle (r, s) l'élément de Δ qui appartient à la $r^{\text{ième}}$ ligne et à la $s^{\text{ième}}$ colonne, on a, par l'énoncé précédent,

$$(2) \qquad (r, r)(s, s) - (r, s)^2 = 0;$$

donc (r, r) et (s, s) sont de même signe, si aucun d'eux n'est nul.

Si D *est nul, ainsi que la somme des mineurs symétriques de degré* $m - 1$ *dans* D, *tous les mineurs de degré* $m - 1$ *sont nuls dans* D.

Les mineurs symétriques sont nuls; car, si certains ne l'étaient pas, comme ils sont des éléments (r, r) de l'adjoint Δ, ils seraient de même signe, et leur somme non nulle.

Les mineurs non symétriques de degré $m - 1$ sont nuls, car chacun d'eux est un élément (r, s) de l'adjoint, et, par ce qui précède, l'égalité (2) devient $(r, s) = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit racine multiple de l'équation en S *est que ce nombre annule* D *et tous ses mineurs de degré* $m - 1$.

La condition est suffisante, car une telle valeur annule D et D'.

La condition est nécessaire, car si S annule D et D', pour cette valeur qui est réelle, le déterminant symétrique D et la somme D' des mineurs symétriques de degré $m - 1$ étant nuls, tous les éléments de l'adjoint sont nuls. C. Q. F. D.

Pour trouver les caractères d'une racine multiple d'ordre donné dans l'équation en S, j'emploierai les considérations suivantes.

Étant données p fonctions linéaires, homogènes et indépendantes, j'appelle *groupe de variables principales* un groupe de p variables dont les coefficients, dans ces fonctions, forment un déterminant non nul. Il peut y avoir plusieurs groupes de variables principales.

THÉORÈME. — *S'il existe deux groupes de variables principales présentant respectivement k lettres non communes, il en existe d'autres, dont on formera l'un en remplaçant, dans le premier, r lettres non communes, arbitrairement choisies, par r lettres convenablement choisies dans le second groupe, parmi les lettres non communes* ($k > 1$).

Je le démontre d'abord pour r égal à 1.

Soient $(x, y, \ldots, z, u, \ldots, v)$, $(x', y', \ldots, z', u, \ldots, v)$ les deux groupes donnés. J'ordonne le déterminant du premier groupe suivant les éléments de la première colonne : les coefficients du développement ne sont pas tous nuls. Dans ce développement, je substitue aux éléments de la première colonne, successivement, les coefficients pris dans les p fonctions de u, puis des lettres communes jusqu'à v; il est clair que les résultats sont nuls. Je substitue de même les coefficients des lettres $x', \ldots, z'$. Si tous ces résultats étaient nuls, il y aurait une relation linéaire à coefficients non tous nuls, entre les coefficients pris dans les p fonctions, des lettres du second groupe, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc l'un des résultats est non nul; je suppose que ce soit le premier : ce résultat est le déterminant du groupe

$$(x', y, \ldots, z, u, \ldots, v),$$

qui est donc principal. C. Q. F. D.

Opérant sur y comme on a fait sur x, on passe de ce dernier à un groupe nouveau $(x', y', \ldots, z, u, \ldots, v)$, et ainsi de suite.

Dans l'ordre où l'on obtient ces groupes, deux consécutifs ont $p-1$ lettres communes; les groupes extrêmes sont les groupes donnés.

Si une fonction quadratique réelle de m variables est décomposable en p carrés indépendants, les mineurs non nuls, symétriques, de degré p, du discriminant de la fonction, sont tous de même signe.

Un mineur symétrique de degré p du discriminant est le discriminant de la fonction où l'on annule toutes les variables, sauf p d'entre elles. Un tel discriminant partiel n'est non nul que si ces p variables sont des variables principales dans les p carrés. Les discriminants partiels répondant à deux groupes principaux qui diffèrent par une seule lettre sont de même signe, comme étant mineurs symétriques de degré p d'un déterminant symétrique, nul, de degré $p+1$.

Deux discriminants partiels répondant à deux groupes principaux qui présentent $p-k$ lettres communes sont les termes extrêmes d'une suite de $k+1$ discriminants partiels, correspondant aux groupes principaux donnés et aux groupes intermédiaires de variables principales, dont on a démontré l'existence. Deux discriminants partiels consécutifs sont de même signe dans cette suite; donc aussi les extrêmes sont de même signe. C. Q. F. D.

Si tous les mineurs symétriques du discriminant, de *degré supérieur à p, sont nuls, les mineurs non symétriques sont aussi nuls jusqu'à ce degré.*

Pour le prouver, je démontre que, si un mineur non symétrique de degré p est non nul, un mineur symétrique de degré égal ou supérieur à p est non nul.

En effet, si un mineur non symétrique de degré p est non nul, la fonction est décomposable en un nombre de carrés indépendants, égal ou supérieur à p, et un discriminant partiel de degré égal ou supérieur à p est différent de zéro. C. Q. F. D.

Si une fonction quadratique est décomposée en p carrés indépendants, la somme des discriminants partiels de degré p est non nulle.

En effet, l'un au moins de ces discriminants n'est pas nul; d'ailleurs ceux qui sont non nuls sont de même signe : donc leur somme est différente de zéro.

Si D *est le discriminant d'une fonction quadratique de degré m, Σ_{m-p} la somme des discriminants partiels de degré $m-p$, et que l'on ait* $D=0$, $\Sigma_{m-1}=0, \ldots,$ $\Sigma_{m-p+1}=0$, $\Sigma_{m-p}\neq 0$, *la fonction est décomposable en $m-p$ carrés indépendants.*

En effet, si le nombre des carrés était supérieur, et égal à $m-p+1$, par exemple, Σ_{m-p+1} ne serait pas nul, et si le nombre des carrés était moindre, Σ_{m-p} serait nul.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit racine multiple d'ordre p de l'équation en S *est que ce nombre annule* D *et tous ses mineurs de degré supérieur à $m-p$.*

En effet, la dérivée d'ordre p de D est

$$1.2\ldots p.(-1)^p\,\Sigma_{m-p}.$$

Σ_{m-p} étant la somme des mineurs symétriques de degré $m-p$. Pour qu'un nombre annule la fonction D et ses $p-1$ premières dérivées, il faut que ce nombre annule D, Σ_{m-1}, Σ_{m-2}, ..., Σ_{m-p+1} et non Σ_{m-p}; dès lors il annule tous les mineurs de D jusqu'au degré $m-p+1$ inclusivement. C. Q. F. D.

Pour cette valeur

$$(1) \qquad f(x, y, \ldots, z) - S(x^2 + y^2 + \ldots + z^2)$$

est décomposable en $m-p$ carrés indépendants.

Deux racines distinctes de l'équation en S *donnent pour la fonction* (1) *des décompositions d'espèce différente.*

Nous dirons, d'après M. Hermite, que deux décompositions sont de même espèce quand les carrés positifs y sont en même nombre, et aussi les carrés négatifs.

Je désigne par S_r une racine de l'équation en S, par P_r, N_r les sommes des carrés positifs et négatifs de la décomposition correspondante, par p_r, n_r les nombres respectifs de ces carrés, par k_r le degré de multiplicité de la racine : on a, par le théorème qui précède,

$$(3) \qquad p_r + n_r = m - k_r.$$

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ les racines distinctes de l'équation en S, rangées par ordre de grandeur croissante. On a

$$f(x, y, \ldots, z) - S_r(x^2 + y^2 + \ldots + z^2) \equiv P_r - N_r,$$
$$f(x, y, \ldots, z) - S_{r+1}(x^2 + y^2 + \ldots + z^2) \equiv P_{r+1} - N_{r+1};$$

d'où, par soustraction,

$$(S_{r+1} - S_r)(x^2 + y^2 + \ldots + z^2) \equiv P_r + N_{r+1} - P_{r+1} - N_r.$$

Comme il y a m carrés positifs dans le premier membre, il faut

$$(4) \qquad p_r + n_{r+1} = m + \alpha,$$

α étant ou positif, ou nul; je retranche (3) et (4), il vient

$$(5) \qquad n_{r+1} - n_r = \alpha + k_r;$$

donc les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots, n_\nu$ vont en croissant et les décompositions sont d'espèces différentes.

Le nombre des carrés négatifs d'une décomposition S_r *est égal au nombre des racines inférieures à* S_r; *c'est-à-dire que l'on a*

$$n_r = k_1 + k_2 + \ldots + k_{r-1}.$$

En effet, ajoutons les formules analogues à (5), il vient

$$n_\nu - n_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{\nu-1} + A,$$

A étant ou positif ou nul; d'ailleurs on a

$$m - k_\nu = n_\nu + p_\nu,$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu = m.$$

J'ajoute ces trois dernières égalités, il vient

$$- n_1 = p_\nu + A;$$

d'où n_1, p_ν et A sont nuls, puisqu'aucun n'est négatif, et les α sont nuls dans les équations (5).

En résumé, une racine de l'équation en S donne autant de carrés négatifs qu'il y a de racines moindres, chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité.

Les nombres des carrés positifs et négatifs, ajoutés au degré de multiplicité de la racine, donnent le nombre des variables. La plus petite racine ne donne que des carrés positifs, la plus grande que des carrés négatifs.

Nombre des carrés positifs ou négatifs de la décomposition de $f(x, y, \ldots, z)$.

Je traite $f(x, y, \ldots, z)$ comme une fonction dépendant de $m+1$ variables $x, y, \ldots, z, t$; et je forme l'équation en S qui est de degré $m+1$. L'équation est la même que celle du $m^{\text{ième}}$ degré obtenue en traitant f comme fonction de m variables, sauf introduction du facteur $-$S. La racine zéro ainsi introduite donne pour

$$f(x, y, \ldots, z) - S(x^2 + y^2 + \ldots + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire pour $f(x, y, \ldots, z)$, une décomposition en carrés indépendants dont autant sont négatifs qu'il y a de racines négatives, autant sont positifs qu'il y a de racines positives.

Nombre des carrés positifs ou négatifs de la décomposition de

$$(6) \qquad f(x, y, \ldots, z) - \Sigma(x^2 + y^2 + \ldots + z^2).$$

L'équation en S de cette nouvelle fonction admet pour racines les déterminations de $S - \Sigma$, quand on remplace dans cette différence S par toutes les racines de l'équation en S de la fonction f; car, si pour f l'équation en S est $\varphi(S) = 0$, pour (6) elle est $\varphi(S + \Sigma) = 0$; dans la décomposition de (6) il y a donc autant de carrés positifs que de racines supérieures à Σ dans l'équation $\varphi(S)$, et autant de carrés négatifs qu'il y a de racines moindres.

Cet énoncé comprend tous les précédents. Reste à déduire de l'équation en S la substitution linéaire orthogonale qui ramène la fonction quadratique à la forme canonique. (*A suivre.*)