MORET-BLANC

Démonstration des propositions de M. Lionnet

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 357-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__357_0>

DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS DE M. LIONNET;

(voir 2e série, t. XX, p. 514);

PAR M. MORET-BLANC.

I. *L'unité est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs.*

Il faut résoudre en nombres entiers l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = y^2 + (y+1)^2 = 2y^2 + 2y + 1,$$

ou, en multipliant par 8 et ajoutant 1,

$$(2x+1)^2 = (4y+2)^2 + 5,$$
$$(2x+4y+3)(2x-4y-1) = 5,$$

ce qui exige que l'on ait, en se bornant aux solutions positives,

$$2x+4y+3 = 5,$$
$$2x-4y-1 = 1,$$

d'où

$$x = 1, \quad y = 0, \quad \frac{x(x+1)}{2} = 1.$$

II. *Dix est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux impairs consécutifs.*

Il faut trouver les solutions entières de l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = (2y-1)^2 + (2y+1)^2 = 8y^2 + 2,$$

d'où, en multipliant par 8 et ajoutant 1 aux deux membres,

$$(2x+1)^2 = 64y^2 + 17,$$
$$(2x+8y+1)(2x-8y+1) = 17.$$

et, par conséquent,

$$2x + 8y + 1 = 17,$$
$$2x - 8y + 1 = 1,$$

d'où

$$x = 4, \quad y = 1, \quad \frac{x(x+1)}{2} = 10 = 1^2 + 3^2;$$

c'est la seule solution entière et positive.

III. *1 et 5 sont les deux seules sommes consécutives de deux carrés d'entiers consécutifs dont le produit égale une somme de deux carrés d'entiers consécutifs.*

L'équation à résoudre est

$$[x^2 + (x+1)^2][(x+1)^2 + (x+2)^2] = y^2 + (y+1)^2,$$

ou

$$4x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 16x + 5 = 2y^2 + 2y - 1,$$

ou, en retranchant 1 de chaque membre et divisant par 2,

$$2(x+1)^4 = y(y+1).$$

Les facteurs y et $(y+1)$ étant premiers entre eux, il faut que l'un soit une quatrième puissance, et l'autre le double d'une quatrième puissance. Posons

$$y = u^4, \quad y + 1 = 2v^4, \quad \text{d'où} \quad x + 1 = uv;$$

il en résulte

$$1 = 2v^4 - u^4 \quad \text{ou} \quad 1 + u^4 = 2v^4.$$

Mais la somme de deux bicarrés n'est jamais égale au double d'un bicarré, à moins qu'ils ne soient égaux; donc

$$u = 1 = v, \quad x = 0, \quad y = 1,$$

d'où la solution

$$(0^2 + 1^2)(1^2 + 2^2) = 1^2 + 2^2; \quad 1 \times 5 = 1 + 4.$$

Si l'on pose

$$y = 2u^4,\quad y + 1 = v^4,\quad \text{d'où}\quad v^4 - 1 = 2u^4,$$

il faut que l'on ait

$$v = 1,\quad u = 0,\quad \text{d'où}\quad x = -1,\ y = 0,$$
$$[(-1)^2 + 0^2](0^2 + 1^2) = 0^2 + 1^2,\quad 1 \times 1 = 1;$$

mais il faut alors considérer des entiers négatifs.

La première solution trouvée est donc la seule en nombres entiers positifs.

IV. *Quand un nombre triangulaire* T *égale le produit de deux entiers consécutifs dont le plus petit est double d'un triangulaire,* $4T + 1$ *est, ainsi que sa racine carrée, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.*

Soit

$$T = \frac{y(y+1)}{2} = (x^2 + x)(x^2 + x + 1),$$

$$4T + 1 = 2y^2 + 2y + 1 = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1,$$

ou

$$4T + 1 = y^2 + (y+1)^2 = [x^2 + (x+1)^2]^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Il en résulte que, pour $T = 0$ *et* $T = 6$, 1 *et* 5 *sont, ainsi que leurs carrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. On démontre facilement, avec ou sans les imaginaires, que* 1 *et* 5 *sont les seuls nombres premiers ayant cette double propriété; et, de même, pour* 1 *et* 13 *qui sont, ainsi que leurs bicarrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. Mais on ignore si un ou plusieurs nombres composés ont l'une de ces doubles propriétés.* (Lionnet.)

Cherchons un nombre qui soit, ainsi que son carré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. Il faut résoudre l'équation

$$[x^2+(x+1)^2]^2 = y^2+(y+1)^2 \text{ (}^1\text{)},$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(x+1+x\sqrt{-1})^2(x+1-x\sqrt{-1})^2\\&\quad=[y+(y+1)\sqrt{-1}]\,[y+(y+1)\sqrt{-1}].\end{aligned}$$

Si le premier membre est le carré d'un nombre premier, ses deux facteurs sont premiers entre eux, ainsi que les facteurs du second membre, qui sont alors nécessairement des carrés.

On doit donc avoir

$$(1)\quad \begin{cases} y+(y+1)\sqrt{-1} = (x+1+x\sqrt{-1})^2 = 2x+1+2x(x+1)\sqrt{-1}, \\ y-(y+1)\sqrt{-1} = (x+1-x\sqrt{-1})^2 = 2x+1-2x(x+1)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} y+(y+1)\sqrt{-1} = 2x+1-2x(x+1)\sqrt{-1}, \\ y-(y+1)\sqrt{-1} = 2x+1-2x(x+1)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

---

(1) Cette équation revient à

$$(1) \qquad (2x+1)^2+[2x(x+1)]^2 = y^2+(y+1)^2;$$

et l'on sait qu'un nombre *premier* ne peut être que d'une seule manière, la somme de deux carrés de nombres positifs, et qu'il en est de même du carré d'un nombre premier; par conséquent, lorsque le nombre $x^2+(x+1)^2$ est premier, l'équation (1) donne

$$2x+1 = y, \quad 2x(x+1) = y+1,$$

ou

$$2x+1 = y+1, \quad 2x(x+1) = y.$$

Dans le premier cas on a

$$x=1, \quad y=3, \quad x^2+(x+1)^2=5;$$

et dans le second

$$x=0, \quad y=0, \quad x^2+(x+1)^2=1 \qquad \text{(G.)}$$

Le premier système donne

$$y = 2x + 1, \quad y + 1 = 2x^2 + 2x,$$

d'où

$$x^2 = 1, \quad x = \pm 1;$$

$x = -1$ donne

$$[(-1)^2 + 0^2]^2 = 0^2 + 1^2,$$

ou bien

$$(0^2 + 1^2)^2 = 0^2 + 1^2;$$

$x = 1$ donne

$$(1^2 + 2^2)^2 = 3^2 + 4^2 \quad \text{ou} \quad 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Le second système ne donne pour x que des valeurs irrationnelles : 1 et 5 sont donc les seuls nombres premiers qui jouissent de la propriété énoncée.

On démontrerait de la même manière que 1 et 13 sont les seuls nombres premiers qui soient, ainsi que leurs bicarrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. La question a été résolue dans les *Nouvelles Annales* (t. XIX, p. 472).

Les équations posées, toujours suffisantes, sont aussi nécessaires dans le cas où le nombre N est premier; leur solution prouve que 1 et 13 sont les seuls nombres premiers satisfaisant aux conditions posées.

Mais, quand le nombre n'est pas premier, les équations (1) et (2) ne sont plus nécessaires, car

$$y + (y + 1)\sqrt{-1}$$

n'est plus nécessairement un carré.

Toutefois, s'il y a un ou plusieurs nombres non premiers jouissant de la double propriété énoncée, ce ne peut être que parmi les nombres très grands. Les nombres qui jouissent de cette propriété que leur carré est la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs forment une suite récurrente

$$1, \ 5, \ 29, \ 169, \ 985, \ \ldots.$$

telle que chaque terme est égal à six fois le précédent moins l'antéprécédent. J'ai vérifié que, jusqu'à 10^{25}, 1 et 5 sont les seuls nombres de cette suite qui soient la somme des deux carrés consécutifs.

De même 169 est le seul, avec 1, qui soit le carré d'un nombre qui est lui-même la somme de deux entiers consécutifs; 1 et 13 sont donc, jusqu'à la même limite, les seuls nombres qui soient, ainsi que leurs bicarrés, la somme de deux carrés consécutifs.

V. *Aucun produit* 1, 3, 5, 7, 9, ... *de plusieurs impairs consécutifs n'est égal à un nombre entier élevé à une puissance d'un degré supérieur à l'unité.*

Lemme. — Entre a et $2a-2$, il y a toujours, au moins, un nombre premier, si a est $> \frac{7}{2}$ (postulatum de M. Bertrand démontré par M. Tchebichef. *Voir* Serret, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 203) et par un *a fortiori*, entre $a>1$ et $2a$, il y a au moins un nombre premier.

Cela posé, dans le produit des n premiers nombres impairs

$$1.3.5.7.9\ldots(2n-1),$$

il y a entre n et $2n$ au moins un nombre premier, qui n'entre dans le produit qu'à la première puissance; donc ce produit ne peut pas être une puissance d'un nombre entier d'un degré supérieur à l'unité.

VI. *Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme ou la différence des cubes soit égale au carré d'un nombre entier.*

1° Soit

$$x^3+(x+1)^3=y^2,$$

ou

$$(2x+1)(x^2+x+1)=y^2.$$

Les deux facteurs $2x+1$ et x^2+x+1 sont premiers entre eux ou bien ils ont pour plus grand commun diviseur 3. En effet, tout nombre divisant ces deux facteurs divisera leur différence $x(x-1)$, et par suite $x-1$ et $2x+1-2(x-1)=3$.

Le plus grand commun diviseur des deux facteurs est donc 1 ou 3.

Si $2x+1$ et x^2+x+1 sont premiers entre eux, chacun d'eux doit être un carré. Posons donc

$$x^2+x+1=\alpha^2,$$
$$2x+1=\beta^2;$$

d'où, en éliminant x,

$$4\alpha^2-\beta^4=3=(2\alpha+\beta^2)(2\alpha-\beta^2).$$

Il faut donc qu'on ait

$$2\alpha+\beta^2=3,$$
$$2\alpha-\beta^2=1;$$

d'où

$$\alpha=\beta^2=1,\quad x=0,\quad y=1,$$
$$0^3+1^3=1^2.$$

Si x^2+x+1 et $2x+1$ ont pour plus grand commun diviseur 3, chacun d'eux doit être le triple d'un carré. Posons donc

$$x^2+x+1=3\alpha^2,$$
$$2x+1=3\beta^2,$$

d'où, par l'élimination de x,

$$4\alpha^2-1=3\beta^4,$$
$$(2\alpha+1)(2\alpha-1)=3\beta^4.$$

$2\alpha+1$ et $2\alpha-1$ étant premiers entre eux, il faut que l'on ait

$$2\alpha+1=3u^4,\quad 2\alpha-1=v^4,\quad \text{d'où}\quad 2=3u^4-v^4$$

ou

$$2\alpha + 1 = u^4, \quad 2\alpha - 1 = 3v^4, \quad \text{d'où} \quad 2 = u^4 - 3v^4,$$

impossible suivant le module 3.

Il reste donc à résoudre l'équation

$$3u^4 - v^4 = 2,$$

qui admet la solution évidente

$$u = 1, \quad v = 1, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = 1, \quad x = 1, \quad y = 3.$$

Elle n'en admet pas d'autre. En effet, M. Lucas, dans ses *Recherches sur l'analyse indéterminée,* page 46, a résolu l'équation

$$3x^4 - y^4 = 2z^2,$$

qui admet une infinité de solutions, dont une seule correspond à $z = 1$.

En résumé, les seuls couples de nombres consécutifs dont la somme des cubes soit égale au carré d'un nombre entier sont 0 et 1, 1 et 2.

2° Soit

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = y^2,$$

ou, en multipliant par 4,

$$3(2x+1)^2 + 1 = (2y)^2,$$

et, en posant

$$2y = u, \quad 2x + 1 = v,$$

$$u^2 - 3v^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont toutes données par les deux termes des réduites de rang pair dans le développement de $\sqrt{3}$ en fraction continue; mais il ne faut prendre que celles dont le numérateur est pair. On a ainsi

$$u = 2, \ 26, \ 362, \ 5042, \ \ldots.$$

$$v = 1, \ 15, \ 209, \ 2921, \ \ldots$$

et, par suite,

$$y = 1,\ 13,\ 181,\ 2521,\ \ldots,$$
$$x = 0,\ \ 7,\ 104,\ 1455,\ \ldots.$$

Ces valeurs forment deux suites récurrentes dont les échelles de relation sont respectivement

$$y_{n+1} = 14y_n - y_{n-1},\quad x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1} + 6.$$

Ce second problème admet donc une infinité de solutions, toutes données par les deux suites ci-dessus

$$\begin{aligned} 1^3 - 0^3 &= 1^2, \\ 8^3 - 7^3 &= 13^2, \\ 105^3 - 104^3 &= 181^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$