NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RÉALIS

Sur quelques intégrales indéfinies

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 343-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__343_1>

SUR QUELQUES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. A l'aide de substitutions convenables, la formule élémentaire

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arc\,tang} y + \text{const.}$$

conduit à des résultats assez curieux, propres à être développés, dans l'enseignement du Calcul intégral, avant d'aborder la théorie des fonctions elliptiques. Nous allons en signaler ici quelques-uns, pour lesquels la transformation consiste simplement à remplacer la variable y par un radical du second degré, sous lequel se trouve une fonction entière d'une nouvelle variable.

Pour plus de simplicité, nous supprimerons partout la constante arbitraire introduite par l'intégration. De plus, dans le second membre de nos formules, nous désignerons souvent par z le radical qui figure au premier membre. Ainsi, en écrivant, par exemple,

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2-2)} \frac{dx}{\sqrt{3-x^4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{xz}{\sqrt{2}},$$
$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+2)} \frac{dx}{\sqrt{x^4-3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{xz}{\sqrt{2}},$$

nous sous-entendons que z représente le radical $\sqrt{3-x^4}$ dans la première égalité, et le radical $\sqrt{x^4-3}$ dans la seconde.

2. On a

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}} = 2 \operatorname{arctang} z,$$
$$\int \frac{3x+1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^2-x}} = 2 \operatorname{arctang} z,$$
$$\int \frac{5x\mp 1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x\mp 1)^2(x\pm 1)^3-1}} = 2 \operatorname{arctang} z,$$
$$\int \frac{7x\mp 1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x\mp 1)^3(x\pm 1)^4-1}} = 2 \operatorname{arctang} z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La formule générale à laquelle se rapportent ces résultats est la suivante :

$$\int \frac{(2n+1)x\mp 1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x\pm 1)(x^2-1)^n-1}}$$
$$= 2 \operatorname{arctang} \sqrt{(x\pm 1)(x^2-1)^n-1},$$

où les signes supérieurs et inférieurs se correspondent. On la vérifie directement par la différentiation.

Les valeurs des intégrales

$$\int \frac{4x \mp 2}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 \pm 2x^3 \mp 2x - 2}},$$

$$\int \frac{5x \mp 3}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \mp 1)(x \pm 1)^4 - 1}},$$

$$\int \frac{6x \mp 4}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \mp 1)(x \pm 1)^5 - 1}},$$

. . . .

se déterminent comme les précédentes. Elles se déduisent, en effet, de la formule générale

$$\int \frac{(n+2)x \mp n}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1)(x \pm 1)^n - 1}}$$
$$= \operatorname{arc\,tang} \sqrt{(x^2 - 1)(x \pm 1)^n - 1}.$$

Parmi les intégrations qui rentrent immédiatement dans la formule fondamentale d'où nous sommes partis, nous inscrirons encore la formule

$$\int \frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \alpha x + \beta)^n - 1}} = \frac{2}{n} \operatorname{arc\,tang} z,$$

dont la généralisation se présente d'elle-même.

Prenant $n = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, on trouve le résultat très remarquable

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}} = \operatorname{arc\,tang} z.$$

3. Des résultats qui viennent d'être signalés, on passe directement aux suivants :

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^4 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,tang} xz,$$

$$\int \frac{5x^2 - 1}{x^4 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^8 + x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1}} = \operatorname{arc\,tang} xz,$$

$$\int \frac{5x^2 + 3}{x^4 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^8 - 3x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 3}} = \operatorname{arc\,tang} xz,$$

. . . .

On a aussi

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+3x^2+3}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} xz,$$

$$\int \frac{nx+(n-1)\alpha}{x(x+\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{x^n+\alpha x^{n-1}-1}} = 2\operatorname{arc\,tang} z,$$

$$\int \frac{2x^2+\alpha}{x^4+\alpha x^2 \pm 1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha)(x^4+\alpha x^2 \pm 2)}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} xz,$$

n étant un entier positif et α une constante quelconque. Il est bon de remarquer que cette dernière formule, où les signes se correspondent dans les deux membres, fait connaître les valeurs des intégrales

$$\int \frac{2x^2 \pm 3}{x^4 \pm 3x^2+1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm 1)(x^2 \pm 2)(x^2 \pm 3)}},$$

$$\int \frac{2x^2 \pm 1}{x^4 \pm x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm 2)(x^4 - 1)}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm 1)\sqrt{(x^2 \pm 2)(x^4 \pm 2x^2+2)}}.$$

4. La formule élémentaire

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{y-1}{y+1}$$

conduit de même, par des substitutions semblables aux précédentes, à la détermination d'intégrales analogues à celles dont on vient de s'occuper.

Par exemple,

$$\int \frac{3x+1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^2-x+2}} = \log\frac{z-1}{z+1},$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2(x+1)^3+1}} = \log\frac{z-1}{z+1},$$

$$\int \frac{7x+1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3(x-1)^4+1}} = \log\frac{z-1}{z+1},$$

. . . . ,

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4-3x^2+3}} = \frac{1}{6}\log\frac{xz-1}{xz+1},$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{(2-x^2)(2-2x^2+x^4)}} = \frac{1}{4}\log\frac{xz+1}{(1-x^2)^2},$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^4-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^6-2x^4+2}} = \frac{1}{4}\log\frac{xz-1}{xz+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int \frac{3x^2-1}{x^4-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2-1}} = \frac{1}{2}\log\frac{xz-1}{xz+1},$$

$$\int \frac{4x^2-2}{x^4-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^6+2x^4-2}} = \frac{1}{2}\log\frac{xz-1}{xz+1}$$

$$\int \frac{5x^2-3}{x^4-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x+3x^6+2x^4-2x^2-3}} = \frac{1}{2}\log\frac{xz-1}{xz+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

z désignant toujours, dans le second membre de chaque formule, le radical qui entre dans le premier membre.

5. On voit assez de quelle manière les résultats qui précèdent pourraient être généralisés à différents points de vue, et comment, par l'emploi combiné des formules fondamentales du Calcul intégral, on peut amener directement une foule d'intégrales indéfinies, analogues aux précédentes, et s'exprimant de même sans l'intervention des fonctions elliptiques. Ajoutons cependant que les résultats à obtenir dans cette voie, étant généralement de simples objets de curiosité, ne sauraient présenter quelque intérêt qu'à la condition de se rapporter à des différentielles très simples.

Citons, en cette matière, l'intégration de la différentielle

$$\frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

effectuée par Euler, et qui a donné lieu récemment à d'intéressantes remarques de la part de M. Hermite et de M. Catalan ([1]). Nous renvoyons du reste au *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. Frenet (Paris, 1882), où se trouvent réunis (nos 401 à 408) plusieurs résultats remarquables, obtenus par Euler et par d'autres, touchant les expressions que l'on intègre en les rendant rationnelles.

Il est à propos de rappeler aussi les intégrales

$$\int \frac{1 \mp x^2}{1 \pm x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^2 + \alpha}},$$

$$\int \frac{\alpha x^4 - \gamma}{\alpha x^4 + \delta x^2 + \gamma} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma}}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}},$$

et quelques autres du même genre, que Legendre a ramenées aux intégrales élémentaires dans ses différents Ouvrages sur le Calcul intégral et les fonctions elliptiques ([2]).

6. L'intégrale

$$\int \frac{\beta - x}{\beta + x} \frac{dx}{\sqrt{x(x+\alpha)(x+\gamma)}}$$

s'exprime pareillement sans transcendante elliptique, lorsque $\beta^2 = \alpha\gamma$, ainsi que cela est établi dans le *Recueil*

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*; année 1879, 1re Partie, p. 226; *Journal de Mathématiques*, année 1880, p. 5; *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 151.

([2]) *Voir* aussi, pour la dernière intégrale, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. X, p. 362.

complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal de M. Tisserand (Paris, 1876, p. 127).

Il en est de même à l'égard de l'intégrale

$$X = \int \frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4}},$$

où l'exposant n est un nombre entier, et les coefficients α, β, γ sont des constante squelconques.

Cette intégrale n'avait pas encore été considérée dans sa généralité. Les cas spéciaux dont Euler et Legendre s'étaient occupés viennent d'être mentionnés. Le cas de $n = 1$, que nous avions proposé comme *question* dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 63), a été traité par M. V. Jamet (p. 188 du même Tome); ce cas comprend l'intégration rapportée dans le *Recueil complémentaire* précité.

Mais il est facile de voir que, quel que soit n, si l'on pose

$$x = \frac{\sqrt{y} - 1}{\sqrt{y} + 1},$$

l'expression X se réduit toujours à la forme

$$\int \frac{Y\,dy}{\sqrt{A + By + Cy^2}},$$

Y étant une fonction rationnelle de y. Cette expression ne représente donc pas une intégrale elliptique.

On trouve, en effet, en faisant, pour abréger,

$$P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^2 + \alpha x^4,$$

$$Q = \left(\alpha - \beta + \frac{\gamma}{2}\right) + (6\alpha - \gamma) y + \left(\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) y^2,$$

les relations

$$\int \frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1+y}{y}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{1+x^3}{1-x^3}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{3+y}{1+3y}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{1+6y+y^2}{y(1+y)}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int \frac{1-x}{1+x}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{y\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \sqrt{2}\int \frac{dy}{(1+y)\sqrt{Q}};$$

$$\int \frac{1-x^3}{1+x^3}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1+3y}{y(3+y)}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{1-x^4}{1+x^4}\frac{dx}{\sqrt{P}} = 2\sqrt{2}\int \frac{1+y}{1+6y+y^2}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

et, par suite,

$$\int \frac{x}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{y-1}{y}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\int \frac{(y-1)^2}{y(y+1)}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{x^3}{1-x^6}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{(y-1)^3}{y(y+3)(3y+1)}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\int \frac{x^4}{1-x^8}\frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{16\sqrt{2}}\int \frac{(y-1)^4}{y(y+1)(y^2+6y+1)}\frac{dy}{\sqrt{Q}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Prenant en particulier

$$P = 1 + x^4, \quad \text{d'où} \quad Q = 1 + 6y + y^2,$$

on reproduit, en leur donnant une grande extension, les intégrales d'Euler (n^{os} 402, 403, 404 du *Recueil* de M. Frenet), auxquelles le grand Analyste était arrivé par une voie différente.

Nous inscrirons encore les formules

$$\int \frac{x+2}{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-\alpha x^2+3x-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha-3}} \arccos \frac{x\sqrt{\alpha-3}}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-\alpha}} \log \frac{\sqrt{x^3-\alpha x^2+3x-1}-x\sqrt{3-\alpha}}{\sqrt{x^3-\alpha x^2+3x-1}+x\sqrt{3-\alpha}},$$

$$\int \frac{x-2}{x+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+\alpha x^2+3x+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3-\alpha}} \arccos \frac{x\sqrt{3-\alpha}}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha-3}} \log \frac{\sqrt{x^3+\alpha x^2+3x+1}-x\sqrt{\alpha-3}}{\sqrt{x^3+\alpha x^2+3x+1}+x\sqrt{\alpha-3}},$$

susceptibles d'une grande et belle généralisation, et dans lesquelles le cas particulier de $\alpha = 3$ constitue une exception digne d'attention.

7. Qu'il nous soit permis, en terminant, de rappeler ici la question 325, proposée de même dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 32), et dont il n'a pas encore été publié de solution.