Nouvelles annales de mathématiques

A. Picart

Solution d'un problème de géométrie

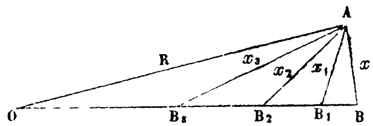
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 33-39
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__33_1>

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. PICART.

Dans un triangle isoscèle OAB, *l'angle à la base* A *vaut n fois l'angle au sommet* O; *déterminer le rapport de la base* AB *au côté* OA.

Menons les droites qui divisent l'angle A en n parties égales, et soient $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ les points où elles ren-



contrent le côté opposé OB. Désignons par x la base AB et par x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n les droites AB_1, AB_2, ..., AB_{n-1}, AO ; x_1 est égal à x et x_n à R.

Les triangles semblables OAB, ABB_1 donnent

$$BB_1 = \frac{xx_1}{R}.$$

Par suite, en vertu de la propriété de la bissectrice de l'angle d'un triangle,

$$B_1B_2 = \frac{x_1x_2}{R}, \quad B_2B_3 = \frac{x_2x_3}{R}, \quad \ldots,$$

$$B_{n-2}B_{n-1} = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{R}, \quad B_nO = \frac{x_{n-1}x_n}{R}.$$

Mais le triangle ABB_2, en vertu d'une autre propriété connue de la bissectrice AB_1, donne

$$(1) \qquad xx_2 - x_1^2 = \frac{xx_1^2x_2}{R^2}.$$

On a de même

$$(2) \qquad x_1x_3 - x_2^2 = \frac{x_1x_2^2x_3}{R^2},$$

$$(3) \qquad x_2x_4 - x_3^2 = \frac{x_2x_3^2x_4}{R^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n-2) \qquad x_{n-3}x_{n-1} - x_{n-2}^2 = \frac{x_{n-3}x_{n-2}^2x_{n-1}}{R^2},$$

$$(n-1) \qquad x_{n-2}x_n - x_{n-1}^2 = \frac{x_{n-2}x_{n-1}^2x_n}{R^2}.$$

De l'équation (1) on pourra tirer x_2; de l'équation (2), après la substitution de la valeur de x_2, on pourra tirer x_3; de l'équation (3), après la substitution des valeurs de x_2, x_3, on pourra tirer x_4, et ainsi de proche en proche jusqu'à l'équation $(n-1)$; et, en remplaçant ensuite x_1 par x et x_n par R, on aura la relation cherchée entre x et R. Mais quelle est la forme générale de cette relation pour une valeur quelconque de n? Telle est la question que nous nous proposons de résoudre. Pour cela, il faut intégrer l'équation aux différences

$$(a) \qquad x_{n-2}x_n - x_{n-1}^2 = \frac{x_{n-2}x_{n-1}^2 x_n}{R^2}.$$

Divisons les deux membres de cette équation par $x_{n-2}x_{n-1}^2 x_n$; elle devient

$$\frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_{n-2}x_n} = \frac{1}{R^2},$$

ou, en posant $\frac{1}{x_n} = y_n$,

$$(b) \qquad y_{n-1}^2 - y_{n-2}y_n = \frac{1}{R^2}.$$

On voit sans peine que

$$(c) \qquad y_n = Ca^n - C'a^{-n},$$

C, C', a étant trois constantes qui satisfont à la relation

$$(d) \qquad CC'(a^2 + a^{-2} - 2) - \frac{1}{R^2} = 0.$$

En effet,

$$y_{n-1}^2 = C^2 a^{2(n-1)} + C'^2 a^{-2(n-1)} - 2CC',$$
$$y_{n-2}y_n = C^2 a^{2(n-1)} + C'^2 a^{-2(n-1)} - CC'(a^2 + a^{-2}),$$

d'où

$$y^2_{n-1} - y_{n-2}y_n = CC'(a^2 + a^{-2} - 2) = \frac{1}{R^2}.$$

L'équation (c) est l'intégrale générale de l'équation (b), puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires.

On tire de (d)

$$a - \frac{1}{a} = \frac{1}{R\sqrt{CC'}}$$

ou

$$a^2 - \frac{a}{R\sqrt{CC'}} - 1 = 0,$$

d'où

$$(e) \qquad a = \frac{1 + \sqrt{4R^2CC' + 1}}{R\sqrt{CC'}}.$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (b) est

$$(f) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_n = {} & R^{-n} C^{1-\frac{n}{2}} C'^{-\frac{n}{2}} \left(1 + \sqrt{4R^2CC' + 1}\right)^n \\ & - R^n C^{\frac{n}{2}} C'^{1+\frac{n}{2}} \left(1 + \sqrt{4R^2CC' + 1}\right)^{-n}; \end{aligned} \right.$$

C et C' sont deux constantes que l'on déterminera par deux valeurs particulières de y_n, par exemple y_0 et y_1.

Dans la question qui nous occupe, nous avons donc

$$(g) \qquad x_n = \frac{1}{Ca^n - C'a^{-n}},$$

avec la condition

$$CC'(a^2 + a^{-2} - 2) - \frac{1}{R^2} = 0;$$

et comme, pour $n = 1$ et $n = 0$, x_n doit être égal à x, les constantes a, C, C' sont déterminées par les trois équations

$$(h) \qquad \left\{ \begin{aligned} & CC'\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{R^2} = 0, \\ & C - C' = \frac{1}{x}, \\ & Ca - \frac{C'}{a} = \frac{1}{x}. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières donnent

$$C = \frac{1}{x(a+1)}, \quad C' = -\frac{a}{x(a+1)};$$

par suite, la première devient

$$-\frac{a}{x^2(a+1)^2}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{R^2} = 0,$$

ou

$$\frac{(a-1)^2}{ax^2} + \frac{1}{R^2} = 0,$$

ou

$$\left(a + \frac{1}{a} - 2\right) + \frac{x^2}{R^2} = 0,$$

d'où

$$(i) \qquad a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2}.$$

Remplaçant C et C' par leurs valeurs dans (g), on obtient

$$x_n = \frac{1}{\dfrac{a^n}{x(a+1)} + \dfrac{a^{-n+1}}{x(a+1)}} = \frac{x(a+1)}{a^n + a^{-n+1}}$$

$$= \frac{a^{n-1}x(a+1)}{a^{2n-1}+1} = \frac{a^{n-1}x}{a^{2n-2} - a^{2n-3} + a^{2n-4} - \ldots},$$

ou

$$(j) \qquad x_n = \frac{x}{\left(a^{n-1} + \dfrac{1}{a^{n-1}}\right) - \left(a^{n-2} + \dfrac{1}{a^{n-2}}\right) + \left(a^{n-3} + \dfrac{1}{a^{n-3}}\right) - \ldots}.$$

Faisons $x_n = R$ et nous aurons enfin, pour former l'équation cherchée en x et R, à éliminer $\left(a + \frac{1}{a}\right)$ entre les deux équations

$$(k) \quad \left\{ \begin{aligned} & a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2}, \\ & \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right) - \left(a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}}\right) + \left(a^{n-3} + \frac{1}{a^{n-3}}\right) - \ldots \\ & \quad + (-1)^{p-1}\left(a^{n-p} + \frac{1}{a^{n-p}}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} = \frac{x}{R}. \end{aligned} \right.$$

Pour faire cette élimination, il faut d'abord exprimer $a^n + \frac{1}{a^n}$ en fonction de $a + \frac{1}{a}$.

Or, en posant $a^n + \frac{1}{a^n} = A_n$, on a

$$(l) \qquad A_{n+1} = A_n\left(a + \frac{1}{a}\right) - A_{n-1}.$$

Comme $A_0 = 2$ et $A_1 = a + \frac{1}{a}$, cette formule permettra de calculer de proche en proche $A_2, A_3, \ldots$, et l'on aura l'expression générale de A_n par l'intégration de l'équation linéaire aux différences (l), intégration bien connue à laquelle nous ne nous arrêterons pas. Nous nous bornerons à remarquer que le premier membre de la seconde équation (k) sera du degré $(n-1)$ en $a + \frac{1}{a}$, qu'en l'élevant au carré, puis l'égalant à $2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)$, valeur de $\frac{x^2}{R^2}$, on aura une équation de degré $2n - 2$ en $a + \frac{1}{a}$ pour déterminer la valeur de cette quantité, et que de cette valeur connue on déduira la valeur de $\frac{x}{R}$, par la relation

$$\frac{x^2}{R^2} = 2 - \left(a + \frac{1}{a}\right).$$

D'après la nature de la question géométrique posée, $\frac{x^2}{R^2}$ doit être plus petit que 1; $a + \frac{1}{a}$ doit donc être positif et compris entre 1 et 2. Par conséquent, on prendra, parmi les $2n - 2$ racines de l'équation en $a + \frac{1}{a}$, celle qui est comprise entre 1 et 2.

Mais on peut se demander pourquoi l'analyse donne, pour déterminer l'unique valeur de $\frac{x^2}{R^2}$, une équation du degré $2n-2$, et quelle est la signification des autres racines de cette équation. On s'en rendra compte en donnant à l'énoncé géométrique de la question le sens plus général suivant :

Étant donnés un point O *et une droite* XnY, *mener par le point* O *deux droites également inclinées sur* XY, *et telles que l'angle qu'elles forment avec* XY *soit égal à n fois l'angle* O *qu'elles font entre elles.*

Dans cet énoncé, l'angle que forme chacune des droites avec XY peut être aussi bien l'angle A du triangle isoscèle OAB de la figure, l'angle $\pi - A$, $2\pi - A$, $3\pi - A, \ldots, k\pi - A, \ldots$. Alors l'angle O doit être égal généralement, non seulement à $\frac{A}{n}$, mais à $\frac{k\pi - A}{n}$; par suite, comme $O + 2A = \pi$, on doit avoir

$$O = \frac{(2k-1)\pi}{2n-1}, \quad A = \frac{(n-k)\pi}{2n-1},$$

d'où

$$\frac{x^2}{R^2} = \frac{\sin^2 O}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n-1}}{\sin^2 \frac{(n-k)\pi}{2n-1}},$$

pour toutes les valeurs entières de k, $0, 1, 2, \ldots, n-1, n+1, n+2, \ldots, 2n-2$.

Ce rapport est susceptible de $2n-2$ valeurs différentes qui constituent les $2n-2$ valeurs de $\frac{x^2}{R^2}$ fournies par les équations (k).