NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Développements sur la question relative à l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 337-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__337_0>

DÉVELOPPEMENTS SUR LA QUESTION RELATIVE A L'INFLUENCE DE LA ROTATION DE LA TERRE SUR LE MOUVEMENT DU PENDULE ;

PAR M. H. RESAL.

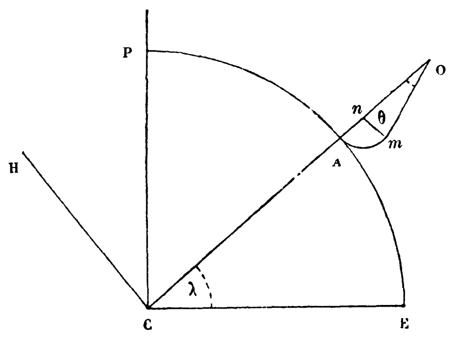
Extrait d'une leçon de l'École Polytechnique.

Dans cette étude j'ai cherché à pousser plus loin l'approximation qu'on ne le fait d'habitude et à tenir compte de la composante de la rotation de la Terre, estimée suivant le rayon parallèle à la méridienne.

Soient

C le centre de la Terre ;
CP la portion boréale de son axe de rotation ;
T la durée d'une révolution diurne ;
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}$ la vitesse angulaire de la Terre, dont

Fig. 1.



nous négligerons les puissances des ordres supérieurs au premier ; nous rappellerons qu'elle a lieu de la droite vers la gauche pour l'observateur placé suivant PC en ayant les pieds en C;

O le point de suspension du pendule dont la longueur sera représentée par l;

OA la position verticale du pendule;

P, E les intersections de la circonférence méridienne, passant par A, avec l'axe de la Terre et la trace du méridien sur l'équateur;

$\lambda = \widehat{OCE}$ la latitude du lieu;

Om le pendule dans une position quelconque;

θ l'angle qu'il forme avec la verticale et qui est censé assez petit pour qu'on puisse en négliger les puissances supérieures à la seconde;

n la projection de m sur OC;

θ_0 l'écart initial qu'on fait subir au pendule avant de l'abandonner ensuite à lui-même;

CH la perpendiculaire en C à CO dans le plan méridien.

Nous avons

$$\text{(1)} \qquad On = l\cos\theta = l\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right).$$

La rotation ω se décompose en deux autres, dont nous étudierons séparément les effets; l'une, $\omega\sin\lambda$, autour de OC, et l'autre, $\omega\cos\lambda$, autour de CH.

1° *Composante de la rotation* $\omega\sin\lambda$ *autour de la verticale.* — Prenons pour plan de projection le plan horizontal du point A.

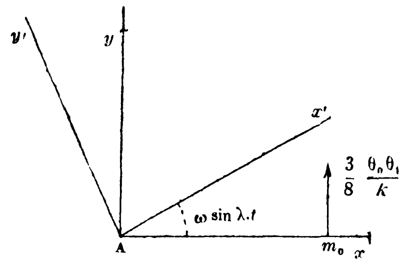
Soient (*fig.* 2) Ax la trace du plan vertical passant par OA et le point de départ m_0; Ay la position que prend cette droite quand on lui fait subir autour de A, de la gauche vers la droite, un déplacement angulaire de 90°.

Le point m, partant de la position m_0 sans vitesse initiale apparente, est animé, dans l'espace absolu, de la vitesse initiale

$$(2) \qquad \omega \sin\lambda . m_0 n_0 = \omega l \sin\lambda . \theta_0,$$

parallèle à Ay; de sorte que, en projection horizontale et dans cet espace, m décrira une ellipse tournant de la

Fig. 2.



gauche vers la droite. Or on sait que, pour déterminer les éléments de cette ellipse, on peut faire abstraction de son mouvement de rotation; posant $k^2 = \frac{g}{l}$ et désignant par θ_1 la valeur de θ correspondant à l'azimut Ay, nous aurons pour les coordonnées du point m au bout du temps t,

$$(3) \qquad x = l\theta_0 \cos kt, \quad y = l\theta_1 \sin kt,$$

et, en vertu de la valeur (2),

$$\frac{dy}{dt} = \omega l \sin\lambda\theta_0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

d'où

$$(4) \qquad \theta_1 = \frac{\omega \sin\lambda . \theta_0}{k}.$$

La vitesse angulaire de l'ellipse sera donc

$$\frac{3}{8}\theta_0\theta_1 k = \frac{3}{8}\omega \sin\lambda \theta_0^2.$$

Soient Ax', Ay' deux axes mobiles coïncidant primitivement avec Ax, Ay, et animés de la rotation $\omega \sin\lambda$ de la droite vers la gauche. La rotation apparente de l'ellipse de la gauche vers la droite pour l'observateur entraîné dans le mouvement de $y'Ax'$ sera

$$(5) \qquad \omega \sin\lambda - \frac{3\omega \sin\lambda \theta_0^2}{8} = \frac{2\pi}{T}\sin\lambda\left(1 - \frac{3}{8}\theta_0^2\right);$$

si τ est la durée d'une révolution de l'ellipse, en admettant qu'elle puisse physiquement s'effectuer, nous aurons

$$\frac{2\pi}{T}\sin\lambda\left(1 - \frac{3}{8}\theta_0^2\right)\tau = 2\pi,$$

d'où

$$\tau = \frac{T}{\sin\lambda}\left(1 + \frac{3}{8}\theta_0^2\right),$$

et, en exprimant τ et T en heures,

$$\tau = \frac{24^h}{\sin\lambda}\left(1 + \frac{3}{8}\theta_0^2\right).$$

A Paris on a

$$\lambda = 48^\circ 51', \quad \sin\lambda = 0,753,$$

et, par suite,

$$\tau = 32^h\left(1 + \frac{3}{8}\theta_0^2\right).$$

Dans l'expérience exécutée par Foucault, au Panthéon, en 1851, on avait

$$l = 67^m, \quad 2\pi l \sin\theta_0 = 18^m,$$

et le terme en θ_0^2 de l'expression précédente, ne s'élevant qu'à 0,0076, n'aurait pu être apprécié.

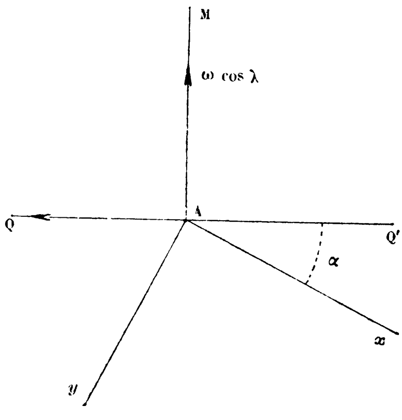
2° *Composante* $\omega \cos\lambda$ *de la rotation autour d'un diamètre parallèle à la méridienne.* — La vitesse de m (*fig.* 1) se compose de la vitesse

$$(6) \qquad -\frac{d\mathrm{O}x}{dt} = l\theta\frac{d\theta}{dt}$$

suivant AO et d'une vitesse horizontale qui, relativement à $\omega \cos\lambda$, ne donnera pas d'accélération centrifuge composée.

Soient (*fig.* 3), dans le plan horizontal, AM la portion de la méridienne dirigée vers le pôle Nord; AQ

Fig. 3.



celle de la tangente au parallèle opposée à la direction du mouvement de la Terre.

La vitesse (6) donne, suivant AQ, l'accélération centrifuge composée

$$2\omega \cos\lambda\theta\frac{d\theta}{dt} = \omega \cos\lambda\frac{d\theta^2}{dt}.$$

Soient encore Ax la position du grand axe de l'ellipse au bout du temps t; α l'angle qu'elle forme avec le prolongement AQ' de AQ.

Les équations du mouvement seraient, en supposant $\omega = 0$,

$$\frac{d^3 x}{dt^2} = -k^2 x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y.$$

En y introduisant l'accélération centrifuge composée ci-dessus, elles deviennent

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x - \omega l \cos\lambda \cos\alpha \dfrac{d\theta^2}{dt}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y + \omega l \cos\lambda \sin\alpha \dfrac{d\theta^2}{dt}. \end{cases}$$

Mais dans ces formules on peut substituer à θ^2 sa valeur résultant de l'hypothèse $\omega = 0$; or

$$l^2 \theta^2 = x^2 + y^2,$$

d'où, d'après les formules (3) et remarquant que θ_1^2 est de l'ordre $\omega^2 \theta_0^2$,

$$\theta^2 = \theta_0^2 \cos^2 kt.$$

On déduit de là

$$(a) \qquad \frac{d\theta^2}{dt} = -\theta_0^2 k \sin 2kt.$$

D'autre part, comme l'expression (5) n'est autre chose que la valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$, il vient, en désignant par α_0 la valeur initiale de α,

$$(b) \qquad \alpha = \alpha_0 + \omega \sin\lambda . t.$$

En substituant les valeurs (a) et (b) dans les équations (7), et posant

$$(8) \quad A = \theta_0^2 \frac{\omega \cos\lambda}{2k}, \quad m = 2k + \omega \sin\lambda, \quad n = 2k - \omega \sin\lambda.$$

il vient

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + A\,l[\sin(mt+\alpha_0) + \sin(nt+\alpha_0)], \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k^2y + A\,l[\cos(mt+\alpha_0) - \cos(nt+\alpha_0)], \end{cases}$$

équation dont on trouvera facilement les intégrales en remarquant que l'on a

$$x = l\theta_0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -l\theta_0\omega\sin\lambda$$

pour $t = 0$. Mais, comme les termes en A introduits dans x et y sont périodiques, que, à peu de chose près, ils s'annulent deux fois dans chaque demi-oscillation pendulaire, ils ne pourront pas être observés. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de la rotation $\omega\cos\lambda$.