MAURICE D'OCAGNE

Remarques sur le pendule

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 32-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__32_0>

REMARQUES SUR LE PENDULE;

Par M. Maurice D'OCAGNE.

Un pendule circulaire se meut dans un milieu qui lui fait éprouver une résistance constante. La loi de son mouvement est donnée, comme on sait, par la formule

$$\theta + \beta = -(\alpha - \beta)\cos kt,$$

dans laquelle θ est l'angle du pendule avec la verticale, α la valeur absolue de l'amplitude initiale, β et k des constantes, β dépendant de la résistance du milieu ambiant.

Considérons les angles décrits successivement par le pendule pendant des intervalles de temps égaux τ. Soient ω_1 et ω_2 deux de ces intervalles consécutifs. Nous avons, par application de la formule précédente,

$$\theta + \omega_1 + \beta = -(\alpha - \beta)\cos k(t - \tau)$$

et

$$\theta - \omega_2 + \beta = -(\alpha - \beta)\cos k(t + \tau).$$

Retranchons la seconde de ces égalités de la première; il nous vient

$$\omega_2 + \omega_1 = -2(\alpha - \beta)\sin kt \sin k\tau,$$

ou, en posant $\omega_1 + \omega_2 = \omega$,

$$\omega = -\frac{2}{k}\sin kt\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Donc :

1. *Les angles décrits successivement par le pendule dans des intervalles de temps égaux sont proportion-*

nels aux vitesses angulaires du pendule au milieu de chacun de ces intervalles de temps.

Au lieu de retrancher les égalités précédentes, ajoutons-les; nous avons

$$2(\theta + \beta) + \omega_1 - \omega_2 = -2(\alpha - \beta)\cos kt \cos k\tau.$$

Or,

$$\theta + \beta = -(\alpha - \beta)\cos kt = -\frac{1}{k^2}\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

donc

$$-\frac{2}{k^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_1 - \omega_2 = -\frac{2}{k^2}\cos kt\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ou

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2}{k^2}(\cos k\tau - 1)\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Par suite :

2. *La différence de deux angles consécutifs décrits par le pendule pendant des intervalles de temps égaux est proportionnelle à l'accélération angulaire du pendule sur la ligne de séparation de ces deux angles.*

Remarquons que, dans un cas comme dans l'autre, la valeur du rapport constant est indépendante de β et, par suite, de la résistance du milieu considéré.