EUGÈNE ROUCHÉ

Sur la méthode des isopérimètres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 325-329
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__325_0>

SUR LA MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

M. Désiré André a fait connaître, en 1874, dans ce Journal (2e série, t. XIII, p. 178), deux propriétés nouvelles des apothèmes et des rayons de la suite des polygones réguliers isopérimètres dont le nombre des côtés va sans cesse en doublant.

Si l'on retranche chaque apothème du suivant, l'une quelconque des différences est inférieure au quart de la précédente.

Si l'on retranche chaque rayon du précédent, l'une quelconque des différences est inférieure au quart de la précédente.

On peut tirer un parti utile de ces propositions qui semblaient n'offrir qu'un intérêt de pure curiosité; nous allons montrer, en effet, qu'elles permettent de simplifier, d'une manière à la fois notable et fort simple, la méthode des isopérimètres.

I. Désignons par α et ρ l'apothème et le rayon du polygone régulier de n côtés dont le périmètre est égal à 2, et par α_k et ρ_k l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre dont le nombre des côtés est égal à $n.2^k$.

Les rapports

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha}, \quad \frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_m-\alpha_{m-1}}{\alpha_{m-1}-\alpha_{m-2}}$$

étant moindres que $\frac{1}{4}$, il en est de même du rapport obtenu en divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, c'est-à-dire du rapport

$$\frac{\alpha_m - \alpha_1}{\alpha_{m-1} - \alpha},$$

et aussi de sa limite lorsque l'entier m croît indéfiniment. On a donc

$$\frac{\frac{1}{\pi} - \alpha_1}{\frac{1}{\pi} - \alpha} < \frac{1}{4},$$

d'où

$$\frac{1}{\pi} < \alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha).$$

Le même raisonnement, appliqué aux rapports

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1}, \quad \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\rho_{m-1} - \rho_m}{\rho_{m-2} - \rho_{m-1}},$$

donne

$$\frac{1}{\pi} > \rho_1 - \frac{1}{3}(\rho - \rho_1).$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

α et ρ étant l'apothème et le rayon d'un polygone régulier quelconque dont le périmètre est égal à 2, et α_1 et ρ_1 étant l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, le nombre $\frac{1}{\pi}$ est compris entre

$$\rho_1 - \frac{1}{3}(\rho - \rho_1) \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha).$$

Remarquons que la différence entre ces deux limites

$$\frac{1}{3}(\rho - \alpha) - \frac{4}{3}(\rho_1 - \alpha_1)$$

équivaut à

$$\frac{2}{3}\,\frac{(\rho_1 - \alpha_1)^2}{\alpha_1}.$$

Il suffit, pour le voir, d'éliminer ρ et α à l'aide des formules fondamentales

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \rho), \quad \rho_1 = \sqrt{\alpha_1 \rho}.$$

II. Cela posé, considérons la suite de Schwab

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, a_1, r_1, a_2, r_2.$$

Tandis que la méthode *ordinaire* des isopérimètres consiste à prendre a_k et r_k pour valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, la méthode *perfectionnée* consiste à prendre

$$r_k - \frac{1}{3}(r_{k-1} - r_k), \quad a_k + \frac{1}{3}(a_k - a_{k-1}).$$

Comparons la marche de l'approximation dans les deux cas.

Pour obtenir $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{10^m}$, il suffit, dans la méthode ordinaire, que l'on ait

$$r_k - a_k < \frac{1}{10^m}.$$

Or, la différence $r_k - a_k$ est moindre successivement que

$$\frac{1}{4}(r_{k-1} - a_{k-1}), \quad \frac{1}{4^2}(r_{k-2} - a_{k-2}), \quad \ldots, \quad \frac{1}{4^{k-1}}(r_1 - a_1),$$

et, par conséquent, moindre que

$$\frac{1}{4^k.10},$$

puisque $r_1 - a_1 = 0,0248\ldots$ est inférieur à $\frac{1}{40}$. L'inégalité primitive sera donc vérifiée si l'on a

$$4^k > 10^{m-1},$$

d'où

$$k > \frac{m-1}{\log 4},$$

et, *a fortiori*,

$$k > \frac{5}{3}(m-1),$$

puisque $\log 4 = 0,602\ldots$ est supérieur à $\frac{3}{5}$.

Dans la méthode perfectionnée, pour obtenir $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{10^m}$, il suffit qu'on ait

$$\frac{2}{3}\frac{(r_k - a_k)^2}{a_k} > \frac{1}{10^m},$$

mais $r_h - a_k$ est inférieur à $\frac{1}{4^k . 10}$, et a_k reste supérieur à $\frac{3}{10}$, puisque $a_1 = 0,301\ldots$; l'inégalité précédente sera donc vérifiée si l'on a

$$\frac{9}{2} 4^{2k} > 10^{m-1},$$

et, *a fortiori*,

$$4^{2k+1} > 10^{m-1}.$$

On en déduit successivement

$$2k+1 > \frac{m-1}{\log 4} > \frac{5}{3}(m-1), \quad k > \frac{1}{6}(5m-8).$$

Comme l'entier égal ou immédiatement supérieur à $\frac{5}{3}(m-1)$ est au moins égal au double de l'entier égal ou immédiatement supérieur à $\frac{1}{6}(5m-8)$, on voit que l'emploi de la méthode perfectionnée diminue certainement le travail de moitié.

III. On pourrait aller plus loin; des deux valeurs approchées

$$s_k = r_k - \frac{1}{3}(r_{k-1} - r_k), \quad b_k = a_k + \frac{1}{3}(a_k - a_{k-1})$$

on déduirait, par un tour analogue, deux nouvelles valeurs plus approchées, et ainsi de suite.

En considérant, par exemple, la valeur par excès b_k et tenant compte de la relation

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \frac{1}{4}\frac{a_k}{a_{k+1}},$$

on verrait que le rapport

$$\frac{b_k - b_{k+1}}{b_{k-1} - b_k}$$

est égal à

$$\frac{1}{4}\frac{a_k . a_{k-1}}{a_{k+1}^2}$$

et, par suite, moindre que $\frac{1}{4^2}$, et il en résulterait, par le raisonnement fait en commençant,

$$\frac{1}{\pi} < b_k - \frac{1}{15}(b_{k-1} - b_k).$$

On voit de la sorte que l'on obtiendrait des valeurs alternativement approchées par défaut et par excès, soit à l'aide des seuls apothèmes, soit à l'aide des seuls rayons.

Nous nous bornerons à cette indication, d'abord parce qu'il s'agit d'une de ces extensions faciles que chacun peut développer, une fois le principe posé, et aussi parce qu'il convient, ce nous semble, de conserver à cette solution élémentaire la simplicité qui la distingue.