NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FRITZ HOFMANN

Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 321-324

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__321_1>

THÉORÈME RELATIF A UN CERTAIN RÉSEAU DE QUATRE SECTIONS CONIQUES;

PAR M. FRITZ HOFMANN, à Munich.

I. *Etant donnes un point fixe* S *et quatre droites fixes quelconques* A, B, C, D, *dont aucune ne passe par le point* S *et qui ne passent pas toutes par un même point* C, D, *si l'on construit quatre sections coniques* K_1, K_2, K_3, K_4 *qui aient toutes le même point* S *pour foyer et telles que*

$$\begin{array}{llll} K_1 & \text{touche } B, C, D & \text{en} & \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \\ K_2 & \phantom{\text{touche }} A, C, D & \text{en} & \alpha_2, \gamma_2, \delta_2, \\ K_3 & \phantom{\text{touche }} A, B, D & \text{en} & \alpha_3, \beta_3, \delta_3, \\ K_4 & \phantom{\text{touche }} A, B, C & \text{en} & \alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \end{array}$$

on a les relations

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \gamma_2) &= (\delta_1 \delta_2) = (\alpha_3 \alpha_4) = (\beta_3 \beta_4), \\ (\gamma_1 \gamma_4) &= (\beta_1 \beta_4) = (\alpha_2 \alpha_3) = (\delta_2 \delta_3), \\ (\gamma_2 \gamma_4) &= (\alpha_2 \alpha_4) = (\beta_1 \beta_3) = (\delta_1 \delta_3), \end{aligned}$$

en désignant par $(\gamma_1 \gamma_2)$ *l'angle* $\gamma_1 S \gamma_2$ *sous lequel la distance des deux points* γ_1, γ_2 *est vue du point* S.

Par la condition énoncée il n'est pas exclu que trois des lignes A, B, C, D ne se coupent en un seul point P; alors une des sections coniques se réduit à ce point P.

II. On peut énoncer le même théorème sous une forme différente :

Étant donnés trois droites quelconques A, B, C, *un point fixe* S *et une section conique fixe* K_3 *qui touche les deux droites* A, B *en* α_3, β_3 *et qui ait* S *pour foyer, quand on décrit pour une tangente quelconque mobile* D *de cette section conique* K_3 *les deux sections coniques* K_1, K_2 *de foyer* S, *et telles que*

$$\begin{array}{llll} K_1 & \text{touche } B, C, D & \text{en} & \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \\ K_2 & \phantom{\text{touche }} A, C, D & \text{en} & \alpha_2, \gamma_2, \delta_2, \end{array}$$

la distance des deux points mobiles δ_1, δ_2 *sur la tangente mobile* D *est toujours vue sous le même angle du point* S.

Dans le mouvement de la tangente D, les lignes A, C, D peuvent passer par un même point P, et B, C, D par un point P'. Pour ces positions-là une des sections coniques K_1, K_2 dégénère en un point sans que la généralité du théorème soit altérée.

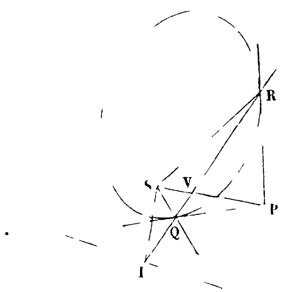
Ces relations curieuses se démontrent aisément à l'aide de deux théorèmes auxiliaires.

1. *Quand on mène d'un point* P (*fig.* 1) *deux tangentes* PR, PQ *à une section conique, on a*

$$\widehat{RSP} = \widehat{PSQ}.$$

Car, la directrice étant rencontrée par la droite RQ, en T, on déduit directement de la figure que la droite

Fig. 1



SP est la polaire du point T : donc le faisceau des quatre rayons S(TRVQ) est harmonique, et puisque, d'après la définition du foyer, TS est perpendiculaire à SP comme polaire de T, on a

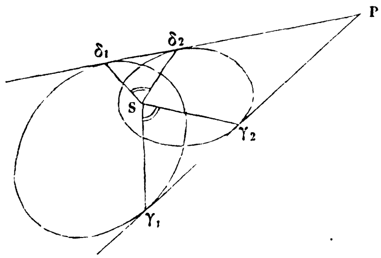
$$\widehat{RSP} = \widehat{PSQ}.$$

2. *Quand deux sections coniques ont un foyer commun* S (*fig.* 2) *et deux tangentes communes* δ_1 δ_2, γ_1 γ_2, *on a*

$$\widehat{\delta_1 S \delta_2} = \widehat{\gamma_1 S \gamma_2}.$$

Ce théorème se déduit du précédent. Donc on a d'abord les six identités suivantes, en ne considérant que les va-

Fig. 2.



leurs absolues des angles

$$(\alpha_2\,\alpha_3) = (\delta_2\,\delta_3) = A_{23}, \quad (\beta_1\,\beta_3) = (\delta_1\,\delta_3) = A_{13},$$
$$(\alpha_2\,\alpha_4) = (\gamma_2\,\gamma_4) = A_{24}, \quad (\beta_1\,\beta_4) = (\gamma_2\,\gamma_4) = A_{14},$$
$$(\alpha_3\,\alpha_4) = (\beta_3\,\beta_4) = A_{34}, \quad (\gamma_1\,\gamma_2) = (\delta_1\,\delta_2) = A_{12}.$$

Mais il y a encore quatre équations évidentes entre les douze angles, savoir:

$$\begin{aligned}(\alpha_2\,\alpha_3) + (\alpha_3\,\alpha_4) + (\alpha_4\,\alpha_2) &= (\beta_1\,\beta_3) + (\beta_3\,\beta_4) + (\beta_4\,\beta_1)\\ &= (\gamma_1\,\gamma_2) + (\gamma_2\,\gamma_4) + (\gamma_4\,\gamma_1)\\ &= (\delta_1\,\delta_2) + (\delta_2\,\delta_3) + (\delta_3\,\delta_1) = 180^\circ,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}A_{23} + A_{34} + A_{24} &= A_{13} + A_{34} + A_{14}\\ &= A_{12} + A_{24} + A_{14}\\ &= A_{12} + A_{23} + A_{13}.\end{aligned}$$

On en déduit les identités suivantes

$$A_{12} = A_{34},$$
$$A_{13} = A_{24},$$
$$A_{14} = A_{23},$$

ou

$$(\gamma_1\,\gamma_2) = (\delta_1\,\delta_2) = (\alpha_3\,\alpha_4) = (\beta_3\,\beta_4).$$