Nouvelles annales de mathématiques

V. Liguine

Sur quelques propriétés géométriques du mouvement d'un point

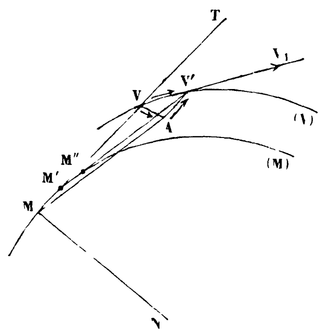
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 300-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__300_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT D'UN POINT;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

1. M. Maurice d'Ocagne, en appliquant un mode particulier de transformation de courbes planes, est arrivé récemment à une intéressante propriété géométrique du mouvement d'un point [1]. Je me propose de



démontrer directement ce théorème à l'aide de considérations purement cinématiques, et d'établir quelques nouvelles propriétés qui s'y rattachent.

2. Considérons un point qui se meut d'une manière quelconque en décrivant une trajectoire (M) que nous supposerons à double courbure. Imaginons que l'on porte, pour chaque position du point mobile, à partir de cette position, sur la tangente à (M) et dans le sens du mouvement, une longueur MV égale à la vitesse v de ce

---

[1] Même Tome, p. 44-45.

point. Le lieu des points V sera une nouvelle courbe (V) que l'on peut considérer comme la trajectoire de l'extrémité V de la vitesse du point M [1]; soit $v_1 = VV_1$ la vitesse du point V dans ce mouvement sur (V). Proposons-nous de chercher la relation entre les deux vitesses v et v_1.

A cet effet, soient M′, M″ deux points de (M) infiniment voisins de M et $M'V' = v'$ la vitesse du mobile en M′. Joignons VV′. Les lignes $MM' = ds = v\,dt$ et $VV' = ds_1 = v_1\,dt$ sont les arcs élémentaires décrits simultanément pendant l'intervalle de temps dt par les deux points M et V. Portons à partir du point M la ligne MA égale et parallèle à M′V′ et joignons VA et AV′. On sait que VA est, en grandeur et en direction, l'accélération élémentaire du point mobile en M; donc, en désignant par φ l'accélération totale de ce point, $VA = \varphi\,dt$. Enfin AV′ est égal et parallèle à MM′, puisque la figure MM′V′A est un parallélogramme. Dans le triangle VAV′, le côté VV′ est la *somme géométrique* des côtés VA, AV′; on a donc *l'équation géométrique* [2]

$$\overline{v_1\,dt} = \overline{\varphi\,dt} + \overline{v\,dt},$$

d'où

$$\overline{v_1} = \overline{v} + \overline{\varphi}, \tag{1}$$

---

[1] La courbe (V) ne paraît pas avoir été spécialement étudiée en Cinématique. La loi de la variation de la vitesse en grandeur et en direction a été représentée par une autre courbe introduite par Hamilton sous le nom de *hodographe*. C'est surtout le système particulier des *coordonnées tangentielles polaires*, proposées par M. Habich, qui se prête naturellement à l'étude de cette ligne (V). Voir Habich, *Études cinématiques*, année 1879, p. 7-12. Les formules générales (24), (33) et (60) de la première Partie de cet Ouvrage embrassent nos équations (2) et (6) comme cas particuliers.

[2] Pour la définition des opérations géométriques et les notations employées, voir Resal, *Traité de Cinématique pure*, p. 18.

c'est-à-dire que :

La vitesse du point V est la résultante ou somme géométrique de la vitesse et de l'accélération totale du point mobile [1].

3. La propriété trouvée par M. d'Ocagne est un des corollaires du dernier théorème. En effet, décomposons la vitesse v_1 en deux composantes $v_{1,T}$, $v_{1,N}$, dirigées l'une suivant la tangente MV ou T et l'autre suivant la normale principale N à la trajectoire (M) en M. Cette décomposition est toujours possible, car les droites v_1, T et N sont situées dans un même plan, le plan osculateur de (M) en M. On aura, en vertu de la relation (1),

$$(a) \quad \begin{cases} v_{1,T} = v_1 \cos(v_1, T) = \varphi \cos(\varphi, T) + v \cos(v, T), \\ v_{1,N} = v_1 \cos(v_1, N) = \varphi \cos(\varphi, N) + v \cos(v, N). \end{cases}$$

Or, la direction T étant prise dans le sens du mouvement,

$$\cos(v, T) = 1, \quad \cos(v, N) = 0;$$

de plus, en désignant par φ_T, φ_N les accélérations tangentielle et normale, c'est-à-dire les composantes de φ suivant les directions T, N, et par ρ le rayon de courbure de (M) en M, on a

$$(b) \quad \varphi \cos(\varphi, T) = \varphi_T = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi \cos(\varphi, N) = \varphi_N = \frac{v^2}{\rho}.$$

---

[1] D'après la relation (1), on peut encore définir l'accélération totale dans le mouvement d'un point comme la différence géométrique des vitesses du point V et du point considéré, puisque de (1) on tire $\overline{\varphi} = \overline{v_1} - \overline{v}$. Cette équation géométrique ou la relation (1) peut aussi être regardée comme une conséquence de ce théorème général dû à Somoff : *La première dérivée géométrique d'une valeur qui varie avec le temps en grandeur et en direction est la différence géométrique entre la vitesse de l'extrémité du vecteur et celle de son origine.* (Voir Somoff, *Theoretische Mechanik, aus dem russischen von Ziwet*, vol. I; 1878.)

Il vient donc

$$(2)\qquad \begin{cases} v_{1,\mathrm{T}} = \varphi_{\mathrm{T}} + v = \dfrac{dv}{dt} + v, \\ v_{1,\mathrm{N}} = \varphi_{\mathrm{N}} = \dfrac{v^2}{\rho}. \end{cases}$$

Ces formules (2) expriment la propriété démontrée par M. d'Ocagne pour le cas particulier d'une trajectoire plane.

4. Puisque, d'après les formules (a),

$$v_1^2 = v_1^2\mathrm{T} + v_{1,\mathrm{N}}^2, \quad \operatorname{tang}(v_1, \mathrm{T}) = \frac{v_{1,\mathrm{N}}}{v_{1,\mathrm{T}}},$$

on trouve, en vertu des relations (2) et (b),

$$(3)\qquad \begin{cases} v_1^2 = \varphi^2 + v^2 + 2v\varphi_{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + 2v\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v^4}{\rho^2} + v^2, \\ \operatorname{tang}(v_1, \mathrm{T}) = \dfrac{\varphi_{\mathrm{N}}}{\varphi_{\mathrm{T}} + v} = \dfrac{v^2}{\rho\left(v + \dfrac{dv}{dt}\right)}. \end{cases}$$

Lorsque le mouvement sur (M) est uniforme, v est constant, et l'on a

$$v_{1,\mathrm{T}} = v, \quad v_{1,\mathrm{N}} = \frac{v^2}{\rho}, \quad v_1 = v\sqrt{\frac{v^2}{\rho^2} + 1}, \quad \operatorname{tang}(v_1, \mathrm{T}) = \frac{v}{\rho}.$$

La tangente de l'angle des vitesses v_1, v varie en raison inverse du rayon de courbure de la trajectoire (M). Si le mouvement uniforme est circulaire, cet angle et la vitesse v_1 sont constants.

Lorsque le mouvement est rectiligne, $\rho = \infty$ et

$$v_{1,\mathrm{N}} = 0, \quad v = v_{1,\mathrm{T}} = \frac{dv}{dt} + v, \quad (v_1, \mathrm{T}) = 0.$$

Enfin, si le mouvement est en même temps rectiligne et uniforme, on aura

$$v_{1,T} = v, \quad v_{1,N} = 0, \quad v_1 = v, \quad (v_1, T) = 0.$$

5. La relation (1) n'est elle-même qu'un cas particulier d'un théorème plus général. Différentions cette relation géométriquement n fois par rapport au temps; en désignant généralement par $\varphi^{(s)}$ et $\varphi_1^{(s)}$ les accélérations totales d'ordre s des points M et V, et en observant que la $n^{\text{ième}}$ dérivée géométrique de la vitesse est l'accélération totale d'ordre n, et la $n^{\text{ième}}$ dérivée de l'accélération totale du premier ordre est l'accélération totale d'ordre $n+1$, on obtient l'équation géométrique

$$\overline{\varphi_1^{(n)}} = \overline{\varphi^{(n+1)}} + \overline{\varphi^{(n)}}. \tag{4}$$

Donc : *la résultante de deux accélérations d'ordres successifs* n *et* $n+1$ *dans le mouvement d'un point est l'accélération d'ordre* n *du point* V.

A l'aide de la relation (4), il est facile de trouver les expressions des composantes $\varphi_{1,T}^{(n)}$, $\varphi_{1,N}^{(n)}$, $\varphi_{1,B}^{(n)}$ de l'accélération $\varphi_1^{(n)}$ d'un ordre quelconque n du point V le long de la tangente T, de la normale principale N et de la binormale B à la trajectoire (M), lorsque l'on connaît les expressions des composantes de $\varphi^{(n)}$ et $\varphi^{(n+1)}$ sur les mêmes directions. On obtiendra en général ces dernières composantes au moyen des formules récurrentes, dues à Somoff [1].

6. Proposons-nous, par exemple, de trouver les composantes $\varphi_{1,T}$, $\varphi_{1,N}$, $\varphi_{1,B}$ de l'accélération totale φ_1 du premier ordre du point V. Pour $n = 1$, la formule (4)

[1] Voir Somoff, *Mémoire sur les accélérations de divers ordres* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 7e série, t. VIII, n° 5), ou *Theoretische Mechanik*, Vol. I.

devient

$$(5)\qquad \overline{\varphi_1} = \overline{\varphi^{(2)}} + \overline{\varphi},$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,\mathrm{T}} &= \varphi_1 \cos(\varphi_1, \mathrm{T}) \\
&= \varphi^{(2)} \cos(\varphi^{(2)}, \mathrm{T}) + \varphi \cos(\varphi, \mathrm{T}) = \varphi^{(2)}_{\mathrm{T}} + \varphi_{\mathrm{T}}, \\
\varphi_{1,\mathrm{N}} &= \varphi_1 \cos(\varphi_1, \mathrm{N}) \\
&= \varphi^{(2)} \cos(\varphi^{(2)}, \mathrm{N}) + \varphi \cos(\varphi, \mathrm{N}) = \varphi^{(2)}_{\mathrm{N}} + \varphi_{\mathrm{N}}, \\
\varphi_{1,\mathrm{B}} &= \varphi_1 \cos(\varphi_1, \mathrm{B}) \\
&= \varphi^{(2)} \cos(\varphi^{(2)}, \mathrm{B}) + \varphi \cos(\varphi, \mathrm{B}) = \varphi^{(2)}_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{B}}.
\end{aligned}$$

Mais, d'après des formes connues (2),

$$\varphi^{(2)}_{\mathrm{T}} = \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}, \qquad \varphi_{\mathrm{T}} = \frac{dv}{dt},$$

$$\varphi^{(2)}_{\mathrm{N}} = \frac{d\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)}{dt} + \frac{v}{\rho}\frac{dv}{dt}, \qquad \varphi_{\mathrm{N}} = \frac{v^2}{\rho},$$

$$\varphi^{(2)}_{\mathrm{B}} = \frac{v^3}{r\rho}, \qquad \varphi_{\mathrm{B}} = 0,$$

r désignant le rayon de torsion de la trajectoire (M). On trouve donc pour les composantes cherchées de φ_1

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi_{1,\mathrm{T}} &= \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho^2}, \\
\varphi_{1,\mathrm{N}} &= \frac{d\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)}{dt} + \frac{v^2}{\rho} + \frac{v}{\rho}\frac{dv}{dt}, \\
\varphi_{1,\mathrm{B}} &= \frac{v^3}{r\rho}.
\end{aligned}\right.$$

7. Posons, dans la formule (4), successivement $n = 1$,

2, 3, ... m; il vient

$$\overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1} = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}}, \quad \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(2)}} = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(3)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(2)}},$$
$$\overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(3)}} = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(4)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(3)}}, \quad \dots, \quad \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(m)}} = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m+1)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m)}},$$

d'où l'on déduit facilement les relations

$$(7)\left\{\begin{aligned} &\overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(3)}} + \dots + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(m)}} \\ &\quad = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m+1)}} + 2\left(\overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(3)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(4)}} + \dots + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m)}}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1} - \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(3)}} - \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(4)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(5)}} - \dots \mp \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(m)}} = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}} \mp \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m+1)}};$$

dans la dernière équation on prendra le signe — lorsque le nombre m est pair et *vice versa*. Enfin, de ces deux dernières relations on conclut encore la suivante

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(4)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(6)}} + \dots + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m+1)}} \\ &\quad = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(3)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(4)}} + \dots + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m)}} + \underset{\cdot}{\varphi}_1^{(m)}, \\ &\text{ou} \\ &\overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(4)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(6)}} + \dots + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}_1^{(m-1)}} \\ &\quad = \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(2)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(3)}} + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(4)}} + \dots + \overline{\underset{\cdot}{\varphi}^{(m)}} \end{aligned}\right.$$

selon que m est pair ou impair. L'interprétation des formules (7), (8) et (9) ne présente aucune difficulté.