Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 29-31
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__29_0>

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA SURFACE DE L'ONDE;

PAR UN ABONNÉ.

On sait, comme l'a fait voir M. Mac-Cullagh, que si par le centre o d'un ellipsoïde on mène un plan ϖ contenant la normale du point $m(x, y, z)$ et, dans ce plan, une droite $o\mu$ égale et perpendiculaire à om, la surface de l'onde est le lieu des points $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$, et les normales aux points correspondants m et μ sont dans le même plan. Il est facile de reconnaître que cette dernière propriété subsiste pour le cas plus général où l'on suppose

$$om = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right) = f(u).$$

En effet, la recherche du lieu se ramène à l'élimination de x, y, z entre les équations

$$px^2 + qy^2 + rz^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = f^2(u),$$

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

$$(2) \quad \alpha(q-r)yz + \beta(r-p)zx + \gamma(p-q)xy = 0.$$

Remplaçons les deux premières par celle-ci

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$P = pf^2(u) - 1, \quad Q = qf^2(u) - 1, \quad R = rf^2(u) - 1.$$

Comme on peut l'écrire

$$Px.x + Qy.y + Rz.z = 0,$$

on en déduit, à l'aide de l'équation (1),

$$\frac{x}{\beta Rz - \gamma Qy} = \frac{y}{\gamma Px - \alpha Rz} = \frac{z}{\alpha Qy - \beta Px}$$
$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{f^2[\alpha(q-r)yz + \beta(r-p)zx + \gamma(p-q)xy]},$$

et par suite

$$(3) \qquad \frac{\alpha}{Px} = \frac{\beta}{Qy} = \frac{\gamma}{Rz},$$

ou bien

$$\frac{x}{\left(\frac{\alpha}{P}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{\beta}{Q}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{\gamma}{R}\right)} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\frac{\alpha^2}{P} + \frac{\beta^2}{Q} + \frac{\gamma^2}{R}},$$

ce qui donne, pour l'équation du lieu,

$$(4) \qquad \frac{\alpha^2}{P} + \frac{\beta^2}{Q} + \frac{\gamma^2}{R} = 0,$$

équation tout à fait semblable à celle de la surface de l'onde.

Pour trouver la direction de la normale au point μ, désignons par $F(\alpha, \beta, \gamma)$ le premier membre de cette équation; il en résulte

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha ff'}{u}\left(\frac{p\alpha^2}{P} + \frac{q\beta^2}{Q} + \frac{r\gamma^2}{R}\right).$$

Soit ω la valeur commune des rapports (3); elle est égale à

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{Px\alpha + Qy\beta + Rz\gamma} = \frac{u^2}{f^2(px\alpha + qy\beta + rz\gamma)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{d\alpha} = \omega\left(x - \alpha\frac{ff'\omega}{u}\right),$$

et semblablement

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{d\beta} = \omega\left(y - \beta\frac{ff'\omega}{u}\right), \quad \frac{1}{2}\frac{dF}{d\gamma} = \omega\left(z - \gamma\frac{ff'\omega}{u}\right).$$

Or, ces trois demi-dérivées sont respectivement proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale au point μ; les quantités $(q - r)yz$, $(r - p)zx$, $(p - q)xy$

le sont de même aux cosinus directeurs de l'axe du plan ϖ, et, comme l'expression

$$\left(x-\alpha\frac{ff'\omega}{u}\right)(q-r)yz+\left(y-6\frac{ff'\omega}{u}\right)(r-p)zx$$
$$+\left(z-\gamma\frac{ff'\omega}{u}\right)(p-q)xy$$

est nulle, la normale au point μ est bien située dans le plan qui contient celle du point m.

Pour la surface de l'onde, M. Mac-Cullagh a démontré que ces normales se coupent à angle droit, mais cela n'a pas lieu généralement. En effet, l'expression

$$px\left(x-\alpha\frac{ff'\omega}{u}\right)+qy\left(y-6\frac{ff'\omega}{u}\right)$$
$$+rz\left(z-\gamma\frac{ff'\omega}{u}\right)=1-\frac{f'u}{f}$$

ne s'annule que lorsqu'on a $f(u)=ku$, k désignant une constante.

On peut observer que la valeur absolue de ω représente le rapport des projections de op et de om sur le plan tangent à l'ellipsoïde.

Observons encore que l'élimination de x, y, z entre les équations du système

$$\alpha x+6y+\gamma z=0,\quad ayz+bzx+cxy=0,$$
$$px^2+qy^2+rz^2=0,$$

plus général que celui qui donne l'équation (4), s'exécute aussi très simplement et conduit à la relation

$$(ap6\gamma+bq\gamma\alpha+cr\alpha6)^2=\mathrm{H}(\alpha^2qr+6^2rp+\gamma^2pq),$$

où

$$\mathrm{H}=2ab\alpha6+2bc6\gamma+2ca\gamma\alpha-a^2\alpha^2-b^26^2-c^2\gamma^2.$$