NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Sur la courbe synchrone de la cycloïde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 289-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__289_0>

SUR LA COURBE SYNCHRONE DE LA CYCLOIDE;

Par M. H. RESAL.

1. Nous rappellerons que l'on désigne en général sous le nom de *courbe synchrone* le lieu des extrémités d'arcs issus d'une origine commune, parcourus dans un temps donné par un point matériel pesant, partant de cette origine sans vitesse initiale, lorsque ces arcs appartiennent à des courbes semblables dont l'origine est le centre de similitude (¹).

On sait que, pour le plan incliné et la lemniscate, la courbe synchrone est un cercle.

Pour des boucles de cycloïde ayant leur base horizontale et une extrémité commune, qui est le point de départ, l'équation de la courbe synchrone est très compliquée; néanmoins on est parvenu à démontrer qu'elle coupe les trajectoires à angle droit.

Dans cette Note, nous nous proposons d'exposer une méthode semi-géométrique, semi-analytique, qui permet d'établir rapidement cette propriété et, de plus, de trouver les expressions de l'aire, de l'arc et du rayon de courbure de la courbe.

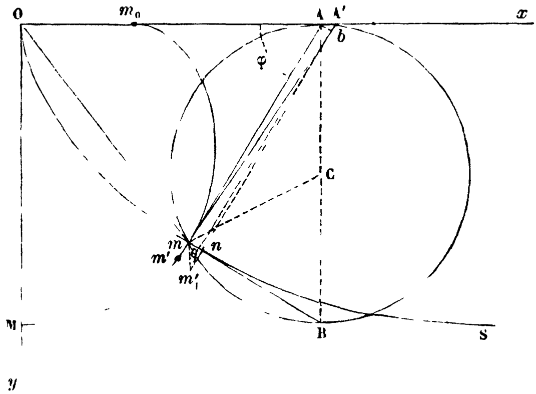
2. Soient

Ox, Oy l'horizontale et la verticale de l'origine O des cycloïdes;
S le sommet de l'une d'entre elles;

(¹) L'idée du problème des courbes synchrones est due à Bernoulli (*Acta Erud.*, 1697). Euler s'est aussi occupé de ce problème (*Mech.*, t. II).

Om l'arc de cette courbe parcouru au bout du temps donné τ;

A, C, $ACB = u$ le point de contact avec Ox, le centre



et le diamètre du cercle générateur passant par m;

φ l'angle formé par la corde Am avec AO;

s un arc quelconque de la cycloïde, mesuré à partir du sommet S.

Par des considérations géométriques élémentaires, qu'il serait superflu de reproduire, on établit facilement l'équation

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{2u} s$$

du mouvement d'un point pesant sur la cycloïde; comme dans le cas actuel nous avons $s = 2u$, $\frac{ds}{dt} = 0$, pour $t = 0$ il vient

$$s = 2u \cos \sqrt{\frac{g}{2u}}\, t$$

et

$$\text{arc } m\text{S} = 2u \cos \sqrt{\frac{g}{2u}}\, \tau.$$

Mais on sait que cet arc est égal à $2mB = 2u\cos\varphi$; par suite

$$(1) \qquad \varphi = \sqrt{\frac{\eta}{u}},$$

en posant

$$(2) \qquad \eta = \frac{g\tau^2}{2},$$

cette expression étant la hauteur OM de la chute verticale du point pesant au bout du temps τ.

Le point M est l'une des extrémités de la courbe synchrone, puisqu'il correspond à $u = \infty$.

Nous avons maintenant

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{OA} = \text{arc } \text{A}m = u\varphi = \sqrt{u\eta}, \\ \text{corde } \text{A}m = u\sin\varphi = u\sin\sqrt{\dfrac{\eta}{u}}. \end{cases}$$

Soient A′, m'_1 les positions infiniment voisines correspondantes de A, m; b, n les projections de A, m sur A′m'_1, et q celle de b sur mn. En ayant égard aux formules (1) et (3), on voit facilement que

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{AA}' = d\,\text{OA} = \dfrac{\sqrt{\eta}}{2}\dfrac{du}{\sqrt{u}}, \\ \text{A}b = \text{AA}'\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{\eta}}{2}\dfrac{du}{\sqrt{u}}\sin\sqrt{\dfrac{\eta}{u}}, \\ d\varphi = -\dfrac{\sqrt{\eta}}{2}\dfrac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \widehat{q\text{A}'n}. \end{cases}$$

Si l'on remarque que

$$mn = mq + qn = \text{A}b + \text{corde } \text{A}m\, d\varphi,$$

et si l'on substitue à Ab, $d\varphi$ et corde Am leurs valeurs ci-dessus, on trouve $mn = 0$.

Le point n venant se confondre avec m, on voit que

m'_1 vient se placer en un point m' situé sur le prolongement de $A'm$ et que, par suite, *la courbe synchrone est normale à la cycloïde.*

3. La plus petite valeur de u correspond à celle des cycloïdes qui est parcourue totalement par le mobile au bout du temps τ et est donnée par

$$OA = \sqrt{u\tau_1} = \pi u,$$

d'où

$$u = \frac{\tau_1}{\pi^2}, \quad OA = \frac{\tau_1}{\pi}, \quad C = \pi.$$

Ainsi, en portant sur l'axe la longueur

$$Om_0 = \frac{\tau_1}{\pi},$$

on obtiendra un point m_0 de la courbe où elle sera tangente à cet axe.

La formule (1) montre d'ailleurs que la tangente est horizontale au point M.

Si l'on se donne une valeur de u supérieure à $\frac{3}{\pi^2}$, il sera facile de déterminer la longueur correspondante de OA, soit au moyen de la première des formules (3), soit par l'intersection avec Ox de la demi-circonférence construite sur la portion de la direction de Oy déterminée par le point M et par l'extrémité d'une longueur égale à u portée au-dessus de O et à partir de ce point. En traçant la circonférence de rayon $\frac{u}{2}$ tangente en A à Ox et limitant sur elle l'arc $Am = OA$, on obtiendra la position du point cherché m.

Il y a un troisième point principal qu'il est bon de déterminer lorsque l'on veut exécuter le tracé de la courbe: c'est celui pour lequel la tangente est verticale;

on a pour ce point, d'après la formule (1),

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\eta}{u}},$$

d'où

$$u = \frac{4\eta}{\pi^2}, \quad \mathrm{OA} = \frac{2\eta}{\pi} = 2\,\mathrm{O}m_0.$$

4. La seconde des formules (3) donne

$$d\overline{\mathrm{A}m} = du\left(\sin\sqrt{\frac{\eta}{u}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{u}}\cos\sqrt{\frac{\eta}{u}}\right)$$

et, en supposant que b se trouve sur $\mathrm{A}'m$, en vertu de la formule (1) et de la première des formules (4),

$$\mathrm{A}'b = \mathrm{AA}'\sin\varphi = \frac{\sqrt{\eta}}{2}\,\frac{du}{\sqrt{u}}\cos\sqrt{\frac{\eta}{u}}.$$

Si nous désignons par $d\sigma$ l'élément d'arc mm' de la courbe synchrone, on a évidement

$$d\sigma + \mathrm{A}'b = d\mathrm{A}m,$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$d\sigma = du\left(\sin\sqrt{\frac{\eta}{u}} - \sqrt{\frac{\eta}{u}}\cos\sqrt{\frac{\eta}{u}}\right),$$

et, en vertu de la formule (1),

$$(5) \qquad d\sigma = -\frac{2\eta}{\varphi^3}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\,d\varphi.$$

L'intégrale générale de cette expression est

$$\sigma = \eta\left(\frac{\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi}}{\varphi} + \int\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi\right) + \text{const.}$$

Pour avoir la longueur λ de l'arc $m_0 m \mu$, l'intégrale devra être prise entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, ce qui donne

$$(6') \qquad \lambda = \eta \left(\frac{1}{\pi} + \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\varphi} \right).$$

5. Comme l'angle de contingence est $-d\varphi$, la formule (5) donne immédiatement, pour le rayon de courbure,

$$(7) \qquad \rho = -\frac{d\sigma}{d\varphi} = 2\eta \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi^3} - \frac{\cos\varphi}{\varphi^2} \right).$$

Pour $\varphi = 0$ ou pour le point M, on a $\rho = \dfrac{2\eta}{3}$,

$\varphi = \pi$ » m_0 » $\rho = \dfrac{2\eta}{\pi^2}$,

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ » » $\rho = \dfrac{16\eta}{\pi^3}$.

Il est facile d'ailleurs de voir que l'expression (7) peut se mettre sous la forme suivante

$$\rho = 2\eta \frac{\text{AB}}{\text{OA}^2} \left(\frac{\text{AB} \times \text{A}m}{\text{OA}} - \text{B}m \right),$$

qui permet à la rigueur de conduire géométriquement le rayon de courbure

6. Proposons-nous maintenant de déterminer la valeur de l'aire $\text{O}m_0 m\text{M}$. De la formule (1) et de la première des formules (3) on déduit

$$u = \frac{\eta}{\varphi^2}, \quad \text{OA} = \frac{\eta}{\varphi}, \quad d\,\text{OA} = -\frac{\eta}{\varphi^2} d\varphi.$$

Nous avons ainsi

$$\text{aire } \text{A}m\text{A}' = \frac{d\,\text{OA}}{2} \frac{u}{2} (1 - \cos 2\varphi) = -\frac{\eta^2}{4\varphi^4} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi.$$

puis

$$\text{aire } m_0 m A = -\frac{r_1^2}{4}\int_\pi^\varphi \frac{(1-\cos 2\varphi)}{\varphi^4}\,d\varphi,$$

$$\text{aire } OmA = \frac{r_1}{2\varphi}\,\frac{u}{2}(1-\cos 2\varphi) = \frac{r_1^2}{4}\,\frac{(1-\cos 2\varphi)}{\varphi^3}$$

$$= \frac{r_1^2}{4}\left\{\int_\pi^\varphi \left[-\frac{3(1-\cos 2\varphi)}{\varphi^4} + \frac{2\sin 2\varphi}{\varphi^3}\right]d\varphi + \frac{2}{\pi^3}\right\}.$$

La différence de ces deux dernières expressions, où l'aire du secteur $Om_0\,m$, que nous désignerons par A, est, par suite,

$$A = \frac{r_1^2}{4}\left[-2\int_\pi^\varphi \frac{(1-\cos 2\varphi)}{\varphi^4}\,d\varphi + 2\int \frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{\varphi^3} + \frac{2}{\pi^3}\right]$$

$$= \frac{r_1^3}{2}\left(\frac{1}{3\varphi^3} + \int_\pi^\varphi \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\varphi^4} + \int_\pi^\varphi \frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{\varphi^4} + \frac{2}{3\pi^3}\right),$$

ou encore, en posant $2\varphi = \chi$,

$$A = r_1^2\left(\frac{4}{3\chi^3} + 4\int_\pi^\chi \frac{\cos\chi\, d\chi}{\chi^4} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^\chi \frac{\sin\chi\, d\chi}{\chi^3} + \frac{1}{3\pi^3}\right).$$

En intégrant par parties, on reconnaît facilement que cette expression se réduit à la suivante

$$A = \frac{r_1^3}{3}\left[\frac{4}{\chi^3}(1-\cos\chi) - \frac{\sin\chi}{\chi^2} - \frac{\cos\chi}{\chi}\right.$$
$$\left.-\int_{\frac{\pi}{2}}^\chi \frac{\sin\chi\, d\chi}{\chi} - \frac{31}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^2}\right].$$

Enfin on a, en supposant $\chi = 0$, pour l'aire cherchée,

$$OMmm_0 = \frac{r_1}{3}\left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{31}{\pi^3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\chi\, d\chi}{\chi}\right).$$