MORET-BLANC

Questions proposées au concours pour les bourses de licence (Marseille, 1881)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 283-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__283_1>

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (MARSEILLE, 1881);

PAR M. MORET-BLANC.

---

1. *On considère la cubique représentée par l'équation*

$$x^3 + y^3 - 3kxy + 1 = 0, \tag{1}$$

et l'on demande, en premier lieu, de déterminer ses points d'inflexion; en second lieu, d'indiquer pour quelle valeur de k cette courbe se décompose en trois droites.

Les points d'inflexion sont déterminés par l'intersection de la courbe avec celle qui est représentée par le hessien égale à zéro

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -k & -ky \\ -k & 2y & -kx \\ -ky & -kx & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et divisant par 2,

$$k^2(x^3 + y^3 + kxy + 1) - 4xy = 0, \tag{2}$$

équation qui, combinée avec celle de la courbe proposée, donne

$$(3)\qquad (k^3 - 1)xy = 0.$$

Les points d'inflexion sont les intersections de la courbe avec les axes de coordonnées : deux sont réels $(x = 0, y = -1)$ et $(y = 0, x = -1)$; les autres sont imaginaires.

L'équation (3) est identiquement satisfaite, quels que soient x et y, si $k^3 = 1$, ou, en se bornant aux valeurs réelles, $k = 1$. Tout point de la courbe est alors un point d'inflexion; c'est-à-dire que la courbe se compose de trois droites.

On arrive à ce même résultat en identifiant l'équation proposée avec

$$(y - mx - n)(y - m_1x - n_1)(y - m_2x - n_2) = 0.$$

On a les conditions

$$m + m_1 + m_2 = 0,\quad mm_1 + mm_2 + m_1m_2 = 0,\quad mm_1m_2 = -1,$$
$$n + n_1 + n_2 = 0,\quad nn_1 + nn_2 + n_1n_2 = 0,\quad nn_1n_2 = -1,$$
$$m_1m_2n + mm_2n_1 + mm_1n_2 = 0,$$
$$mn_1n_2 + m_1nn_2 + m_2nn_1 = 0,$$
$$mn_1 + m_1n + mn_2 + m_2n + m_1n_2 + m_2n_1 = -3k.$$

Les trois premières montrent que les valeurs m, m_1, m_2 sont les trois racines cubiques de -1, et les trois suivantes qu'il en est de même de n, n_1, n_2; et si l'on prend

$$m = -1,\quad m_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2},\quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},$$

il faut, pour satisfaire aux autres conditions, prendre

$$n = -1,\quad n_1 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},\quad n_2 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2},$$

et faire $k = 1$.

Les trois droites sont donc

$$x + y + 1 = 0,$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} x + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} x + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Les deux dernières sont imaginaires et se coupent au point réel $x = y = 1$.

2. *On considère toutes les coniques passant par l'intersection d'un cercle et de deux droites parallèles données, et on demande le lieu des foyers de ces courbes. Discuter la forme de ce lieu dans le cas où l'une des droites parallèles devient tangente au cercle donné.*

Prenons pour axe des x le diamètre du cercle parallèle aux droites données et pour axe des y le diamètre perpendiculaire, et soient

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

l'équation du cercle, et

$$y = a, \quad y = b$$

celles des deux droites données; l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des droites et du cercle sera

$$x^2 + y^2 - r^2 + \lambda(y - a)(y - b) = 0,$$

ou

$$(1) \qquad x^2 + (1 + \lambda)y^2 - \lambda(a + b)y - r^2 + \lambda ab = 0.$$

La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant qu'on a $\lambda < -1$, $\lambda = -1$, $\lambda > -1$.

Les coordonnées du centre sont $x = 0$, $y = \frac{\lambda(a+b)}{2(1+\lambda)}$.

En y transportant l'origine, l'équation devient

$$x^2 + (1+\lambda)y^2 = r^2 - \lambda ab + \frac{\lambda^2(a+b)^2}{4(1+\lambda)},$$

ou

$$x^2 + (1+\lambda)y^2 = r^2 + \frac{\lambda^2(a-b)^2 - 4\lambda ab}{4(1+\lambda)}.$$

L'axe des y sera l'axe focal : 1° des ellipses correspondant aux valeurs de λ comprises entre zéro et -1 ; 2° de la parabole; 3° des hyperboles correspondant aux valeurs de $\lambda < -1$, pourvu que l'on ait aussi

$$r^2 + \frac{\lambda^2(a-b)^2 - 4\lambda ab}{4(1+\lambda)} > 0.$$

Dans les autres cas le foyer sera sur l'axe de la courbe parallèle à Ox. Cherchons le lieu de ces foyers.

Soient C le centre de la courbe, BB′ l'axe dirigé suivant Oy, et AA′ l'axe parallèle à Ox.

$\overline{CB}^2$ est le carré de la demi-différence des racines de l'équation

$$(1+\lambda)y^2 - \lambda(a+b)y - r^2 + \lambda ab = 0.$$

On a donc

$$\overline{CB}^2 = \frac{\lambda^2(a-b)^2 + 4\lambda(r^2 - ab) + 4r^2}{4(1+\lambda)^2},$$

$$\overline{CA}^2 = \frac{\lambda^2(a-b)^2 + 4\lambda(r^2 - ab) + 4r^2}{4(1+\lambda)};$$

x et y désignant les coordonnées d'un des foyers, on a

$$y = \frac{\lambda(a+b)}{2(1+\lambda)},$$

$$x^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \frac{\lambda[\lambda^2(a-b)^2 + 4\lambda(r^2 - ab) + 4r^2]}{4(1+\lambda)^2}.$$

On obtiendra le lieu des foyers en éliminant λ entre ces deux équations, ce qui donne

$$x^2 = \frac{2y[(a+b)y^2 - 2(r^2+ab)y + r^2(a+b)]}{(a+b)(a+b-2y)}.$$

C'est une courbe du troisième ordre passant par l'origine et symétrique par rapport à l'axe des y.

Si l'une des droites est tangente à la circonférence, il faut faire $b = r$, et l'équation devient

$$x^2 = \frac{2y(y-r)^2}{a+r-2y},$$

d'où

$$x = \pm (r-y)\sqrt{\frac{2y}{a+r-2y}}.$$

On en tire

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{(a+r)(r-3y)+4y^2}{(a+r-2y)\sqrt{2y(a+r-2y)}},$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{(a+r-2y)\sqrt{2y(a+r-2y)}}{(a+r)(r-3y)+4y^2}.$$

On ne peut donner à y que les valeurs comprises entre zéro et $\frac{a+r}{2}$; la courbe, symétrique par rapport à l'axe des y, touche l'axe des x à l'origine et a pour asymptote la droite $y = \frac{a+r}{2}$, c'est-à-dire la parallèle équidistante des deux droites données; elle présente donc deux points d'inflexion, donnés par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ou

$$(5r-3a)y - r(a+r) = 0.$$

d'où

$$y = \frac{r(a+r)}{5r-3a},$$

$$x = \pm \frac{4r}{5r-3a}\sqrt{\frac{2}{3}r(r-a)}.$$