NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. KIEN

Concours d'admission à l'École centrale (première session, 1881)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 278-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__278_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE
(PREMIÈRE SESSION, 1881);

PAR M. L. KIEN,
Élève de l'Institution Notre-Dame, à Plaisance.

Soit

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O *et à* *ses axes; soient α, β les coordonnées d'un point* P *situé dans le plan de l'ellipse.*

1° *Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point* P *sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation*

$$(2) \qquad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$.

2° *On considère toutes les coniques qui passent par les points communs aux courbes* (1) *et* (2); *dans chacune d'elles, on mène le diamètre conjugué à la direction* OP, *et on projette le point* O *sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.*

3° *Par les points communs aux courbes* (1) *et* (2), *on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles, quand le point* P *se meut sur une droite de coefficient angulaire donné m, menée par le point* O.

On examinera en particulier le cas où $m = \frac{a^3}{b^3}$ et celui où $m = -\frac{a^3}{b^3}$.

1° L'équation d'une normale en un point (x, y) de l'ellipse est

$$\frac{Y - y}{a^2 y} = \frac{X - x}{b^2 x};$$

si cette normale est assujettie à passer par le point $P(\alpha, \beta)$, on a la condition

$$\frac{\beta - y}{a^2 y} = \frac{\alpha - x}{b^2 x}$$

ou

$$(2) \qquad c^2 xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Les points d'incidence (x, y) sont à l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole équilatère (2), car leurs coordonnées sont données par l'équation de cette ellipse (1) et l'équation (2), considérées comme simultanées; la première partie est donc démontrée.

2° Ces points d'incidence sont au nombre de quatre; en les joignant on obtient un quadrilatère, et les coniques passant par ces quatre points sont circonscrites à ce même quadrilatère.

Or nous savons que les diamètres correspondant à une direction donnée, dans les coniques circonscrites à un quadrilatère, passent par un point fixe Q; de plus, les perpendiculaires abaissées de O sur ces diamètres passent toutes par le point fixe O; le lieu de la projection de O sur ces mêmes diamètres sera donc le cercle décrit sur OQ comme diamètre.

Le calcul vérifie d'ailleurs ce raisonnement.

L'équation générale des coniques passant par les pieds des normales est

$$(\mathrm{K})\quad a^2y^2 + b^2x^2 + \lambda(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 = 0.$$

La droite OP ayant pour coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$, les diamètres conjugués dans les coniques (K) ont pour équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0,$$

ou

$$(3)\quad (2b^2\alpha + \lambda c^2\beta)x + (\lambda c^2\alpha + 2a^2\beta)y - \lambda c^2\alpha\beta = 0.$$

L'équation des perpendiculaires abaissées de O sur ces diamètres est donc

$$(4)\qquad y = \frac{\lambda c^2\alpha + 2a^2\beta}{2b^2\alpha + \lambda c^2\beta}x.$$

En éliminant λ entre les équations (3) et (4), on a le lieu. On trouve l'équation

$$\begin{aligned}&(b^2\alpha x + a^2\beta y)(\beta y - \alpha x)\\ &\quad - (b^2\alpha y - a^2\beta x)(\beta x + \alpha y - \alpha\beta) = 0,\end{aligned}$$

ou simplement

$$(x^2+y^2)(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)-(a^2\beta x-b^2\alpha y)\alpha\beta=0,$$

équation d'un cercle passant par l'origine.

3° Déterminons λ dans l'équation (K) pour que cette équation représente une parabole. Il faut ici que

$$\lambda^2c^4-4a^2b^2=0,$$

d'où

$$\lambda=\pm\frac{2ab}{c^2}.$$

Par suite, l'équation des deux paraboles passant par les pieds des normales issues de P est

$$(ay\pm bx)^2\pm\frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x-a^2\alpha y)-a^2b^2=0.$$

Séparons les signes, en remarquant qu'après avoir calculé pour les signes supérieurs, on passera aux signes inférieurs en changeant b en $-b$ dans cette dernière équation. On a donc

$$(5)\quad (ay+bx)^2+\frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x-a^2\alpha y)-a^2b^2=0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole est

$$\mathrm{A}f'_x+\mathrm{B}f'_y=0,$$

ou

$$(6)\qquad (bx+ay)(a^2+b^2)+\frac{ab}{c^2}(b^3\beta-a^3\alpha)=0.$$

Le point P étant sur la droite $y=mx$, on a

$$(7)\qquad \beta=m\alpha.$$

En éliminant α, β entre les équations (5), (6), (7), on a le lieu du sommet de l'une des paraboles.

On trouve ainsi l'équation

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &2(b^2mx-a^2y)(bx+ay)(a^2+b^2)\\ &\quad-(b^3m-a^3)\\ &\quad\times(ay+bx+ab)(ay+bx-ab)=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on considérait la deuxième parabole, le lieu de son sommet serait

$$\begin{aligned}&2(b^2mx - a^2y)(bx - ay)(a^2 + b^2)\\&\quad -(b^3m + a^3)(ay - bx + ab)(ay - bx - ab) = 0.\end{aligned}$$

On pourrait chercher les axes de la conique (8), puis la construire facilement. On pourrait aussi chercher pour quelles valeurs de m la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. L'origine est d'ailleurs centre de la conique.

En remplaçant m par $\frac{a^3}{b^3}$ dans l'équation (8), on obtient

$$bx + ay = 0,$$

équation d'une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse, et, en remplaçant m par cette même valeur dans l'équation du lieu relatif à la deuxième parabole des pieds des normales, on obtient

$$\begin{aligned}&(bx - ay)(ax - by)(a^2 + b^2)\\&\quad - ab(ay - bx + ab)(ay - bx - ab) = 0,\end{aligned}$$

ou plus simplement

$$(a^2x^2 + b^2y^2)ab - (a^4 + b^4)xy + a^3b^3 = 0.$$

On a

$$(a^4 + b^4)^2 - 4a^4b^4 = (a^4 - b^4)^2 > 0;$$

le lieu est donc, dans ce cas, une hyperbole.

L'équation des asymptotes de cette hyperbole est

$$ab(a^2x^2 + b^2y^2) - (a^4 + b^4)xy = 0.$$

En remplaçant m par $-\frac{a^3}{b^3}$ dans les deux équations du lieu trouvé plus haut, il vient pour la première

$$(a^2x^2 + b^2y^2)ab - (a^4 + b^4)xy - a^3b^3 = 0.$$

équation d'une hyperbole ayant mêmes asymptotes que la précédente.

Pour la deuxième équation, on trouve

$$bx - ay = 0,$$

équation d'une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse.

Note. — La même question a été résolue par M. Chaigneau, élève de l'école préparatoire Duvigneau de Lanneau (classe de M. Geoffroy), et par M. H. Lez.