NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. ROUBAUDI

Solution de la question de mécanique proposée pour l'obtention du brevet de Cluny en 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 274-278

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__274_1>

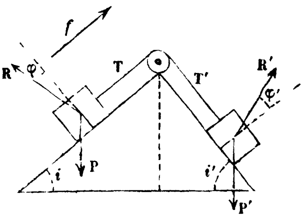
SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE POUR L'OBTENTION DU BREVET DE CLUNY EN 1880;

PAR M. C. ROUBAUDI.

Deux corps P et Q placés sur deux plans inclinés sont unis par un fil flexible qui passe sur une poulie. Étudier le mouvement du corps P, sachant que les angles que ces plans font avec l'horizon sont respectivement i et i'.

Supposons que le mouvement ait lieu dans le sens de la flèche f, et considérons séparément le mouvement des poids P, P' et de la poulie.

1° *Mouvement du corps* P.—Les forces qui sollicitent ce corps sont : son poids P, la tension T du fil qui le



retient, et, si l'on tient compte du frottement, la réaction R du plan, qui est incliné sur la normale aux surfaces apparentes, et en sens inverse du mouvement, d'un angle $\alpha = \operatorname{arc\,tang} f$, f étant le coefficient du frottement relatif aux substances en contact.

L'équation du mouvement de ce corps est, en appelant φ l'accélération du mouvement,

$$(1) \qquad m\varphi = \mathrm{T} - \mathrm{P}\sin i \mathrm{R}\sin\alpha.$$

Comme la trajectoire qu'il décrit est rectiligne, la somme des projections des forces sur la normale est nulle, ce qui fournit la relation

$$(2) \qquad \mathrm{R}\cos\alpha - \mathrm{P}\cos i = 0.$$

Ces deux équations donnent tout ce qui est relatif au mouvement du corps P et permettent de déterminer la réaction R. Si l'on élimine R, on en conclut

$$(3) \qquad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{P}}{g}\varphi + \mathrm{P}(\sin i + f\cos i).$$

2° *Mouvement du corps* P'. — En raisonnant comme pour le corps P, on trouve les trois équations analogues

$$(1)' \qquad m'\varphi = P'\sin i' - R'\sin\alpha - T',$$

$$(2)' \qquad R'\cos\alpha' - P'\cos i' = 0,$$

$$(3)' \qquad T' = P'(\sin i' - f'\cos i') - \frac{P'}{g}\varphi.$$

3° *Mouvement de la poulie.* — Si je désigne par le symbole φ_ω l'accélération angulaire de la poulie, on sait que cette accélération a pour expression la somme des moments, par rapport à l'axe de la poulie, des forces qui la sollicitent, divisée par le moment d'inertie I; j'aurai donc

$$\varphi_\omega = \frac{r}{I}(T' - T);$$

par suite, l'accélération linéaire d'un point de la circonférence moyenne, qui est celle du mouvement général de tout le système, aura pour expression

$$(4) \qquad \varphi = \frac{r^2}{I}(T' - T).$$

Les équations (3), (3)' et (4) nous font connaître le mouvement du système caractérisé par φ, et permettent de déterminer les tensions T et T'.

1° *Détermination de* φ. — En retranchant membre à membre (3) et (3)', il vient

$$T' - T = P'(\sin i - f'\cos i') \\ - P(\sin i + f\cos i) - \frac{\varphi}{g}(P' + P),$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (4), on a

$$\varphi\frac{I}{r^2} = P'(\sin i' - f'\cos i') \\ - P(\sin i + f\cos i) - \frac{\varphi}{g}(P' + P),$$

relation de laquelle on déduit facilement

$$(5) \qquad \varphi = g\,\frac{r^2[\mathrm{P}'(\sin i - f\cos i') - \mathrm{P}(\sin i + f\cos i)]}{\mathrm{I}g + r^2(\mathrm{P}+\mathrm{P}').}.$$

Telle est l'équation qui définit le mouvement du système; elle montre que ce mouvement est uniformément varié; ses lois sont par suite connues.

Discussion. — Si $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} < \frac{\sin i' - f\cos i'}{\sin i + f\cos i}$, alors φ est > 0 et le mouvement du corps P est ascendant et uniformément accéléré. Ses lois sont donc

$$s = \varphi\,\frac{t}{2}, \qquad v = \varphi t,$$

ou

$$s = s_0 + \varphi\,\frac{t^2}{2}, \qquad v = v_0 + \varphi t,$$

selon qu'à l'origine des temps le système était au repos ou possédait une vitesse v_0.

Si $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} > \frac{\sin i' - f'\cos i'}{\sin i + f\cos i}$, alors φ est < 0 et le corps P est animé d'un mouvement descendant retardé, ou bien d'un mouvement descendant accéléré, selon que ce corps possédait une vitesse initiale ascendante v_0 ou qu'il était primitivement au repos.

Enfin, dans le cas particulier où $\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{\sin i' - f'\cos i'}{\sin i + f\cos i'}$, alors φ est nul, et le corps P est en repos ou en mouvement uniforme, selon qu'il était primitivement au repos ou qu'il possédait une vitesse initiale v_0.

2° *Détermination des tensions.* — Si, dans les équations (3) et (3)', je remplace φ par sa valeur tirée de (5), il vient, toutes réductions faites

$$(6) \quad \mathrm{T} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{I}g(\sin i + f\cos i) + \mathrm{P}'r^2(\sin i + f\cos i + \sin i' - f'\cos i')}{\mathrm{I}g + r^2(\mathrm{P}+\mathrm{P}')},$$

$$(7) \quad \mathrm{T}' = \mathrm{P}'\,\frac{\mathrm{I}g(\sin i' - f'\cos i') + \mathrm{P}r^2(\sin i' - f'\cos i' + \sin i' + f'\cos i')}{\mathrm{I}g + r^2(\mathrm{P}+\mathrm{P}')}.$$

Remarque. — Si l'on néglige le frottement, les équations qui déterminent le mouvement du système et les tensions du fil deviennent

$$\varphi = g\,\frac{r^2(\mathrm{P}'\sin i' - \mathrm{P}\sin i)}{\mathrm{I}g + r^2(\mathrm{P}+\mathrm{P}')},$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{I}g\sin i + \mathrm{P}'r^2(\sin i + \sin i')}{\mathrm{I}g + r^2(\mathrm{P}+\mathrm{P}')},$$

$$\mathrm{T}' = \mathrm{P}'\,\frac{\mathrm{I}g\sin i' + \mathrm{P}r^2(\sin i + \sin i')}{\mathrm{I}g + r^2(\mathrm{P}+\mathrm{P}')}.$$

Si, de plus, on néglige l'inertie de la poulie, il vient

$$\varphi = g\,\frac{\mathrm{P}'\sin i' - \mathrm{P}\sin i}{\mathrm{P}+\mathrm{P}'},$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}' = \frac{\mathrm{P}\mathrm{P}'(\sin i + \sin i')}{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}.$$

Enfin on pourrait terminer la discussion du problème en faisant varier les angles i et i', et examinant les cas particuliers où ces angles prennent les valeurs remarquables 0 et 90°; mais cette partie ne présentant aucune difficulté, nous laissons au lecteur le soin de voir ce que deviennent les expressions précédentes quand on y introduit les hypothèses indiquées.