Ernest Lebon

Solution de la question de géométrie descriptive proposée au concours d'agrégation de l'enseignement spécial en 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 269-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__269_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL EN 1880;

PAR M. ERNEST LEBON.

On donne deux plans verticaux se rencontrant sous un angle quelconque. Par un point de leur intersection on fait passer une série de plans coupant les deux premiers suivant deux droites perpendiculaires l'une à l'autre. Construire la trace du cône enveloppe de ces plans et reconnaître la nature de ce cône.

1. La trace horizontale du cône enveloppe est l'enveloppe de droites construites de la manière suivante :

Le plan vertical de projection est l'un des plans donnés; la ligne de terre est QQ_1; l'autre plan donné est $P\alpha P'$; l'angle aigu $P\alpha Q$ est l'angle β des plans donnés [1].

Soit s' le point donné sur $\alpha P'$. Menons une droite $s'a$ dans le plan vertical; sa trace horizontale est a sur QQ_1. Un plan mené par s' perpendiculairement à $s'a$ est perpendiculaire au plan vertical; il a pour traces les perpendiculaires $s'a'_1$ à $s'a$ et $a'_1 a$ à QQ_1; il coupe le plan $P\alpha P'$ selon une droite faisant un angle droit avec sa, et ayant sa trace horizontale au point d'intersection a_1 de αP et de $a'_1 a_1$. Le plan déterminé par les droites rectangulaires issues de s' et ayant pour traces a et a_1 coupe le plan horizontal selon la droite aa_1. La trace horizontale du cône enveloppe est l'enveloppe des droites telles que aa_1.

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

2. *Degré de la trace du cône, trouvé par la Géométrie supérieure.* — Le triangle rectangle asa'_1 donne, en désignant αs par h,

$$h^2 = \alpha a . \alpha a'_1 = \alpha a . \alpha a_1 . \cos\beta.$$

D'où

$$(1) \qquad \alpha a . \alpha a_1 = \frac{h^2}{\cos\beta}.$$

Donc les points tels que a et a_1 sur les droites αP et αQ sont deux points homologues de deux divisions homographiques, dont les points homologues des points à l'infini coïncident en α. On sait que l'enveloppe des droites joignant deux points homologues a et a_1 est une conique tangente aux droites αP et αQ aux points homologues de leur point d'intersection α, considéré successivement sur ces droites.

Donc la conique trace horizontale du cône enveloppe est une *hyperbole*, ayant pour asymptotes les droites αP et αQ. Les droites telles que aa_1 étant des portions de tangentes à l'hyperbole comprises entre les asymptotes, les points de l'hyperbole sont au milieu de ces droites.

Les branches de l'hyperbole sont dans les angles obtus formés par αP et αQ. Ses axes sont selon les bissectrices des angles des asymptotes. Une construction géométrique connue donne ses sommets ; on peut ici les obtenir en cherchant le point milieu de aa_1 quand $\alpha a = \alpha a_1$, ou quand

$$\overline{\alpha q}^2 = \frac{h^2}{\cos\beta}.$$

3. Les droites αQ et αP étant les axes coordonnés, l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est

$$(2) \qquad xy = \frac{h^2}{4\cos\beta}.$$

4. *Autres solutions pour trouver le degré de la trace du cône enveloppe.* — On peut trouver la relation (1) comme précédemment; puis on dit :

Considérons une seconde droite bb_1, analogue à aa_1, et la coupant en I. D'après la relation (1), on a

$$\alpha a . \alpha a_1 = \alpha b . \alpha b_1.$$

Donc les deux triangles $a\alpha a_1$ et $b\alpha b_1$ sont égaux; par suite, les deux triangles $a\mathrm{I}b$ et $a_1\mathrm{I}b_1$ sont aussi égaux, et l'on a

$$\mathrm{I}a . \mathrm{I}b = \mathrm{I}a_1 . \mathrm{I}b_1.$$

Le lieu cherché étant l'enveloppe des droites aa_1, bb_1, ..., est tangent à la droite aa_1 au point limite des positions du point d'intersection I des droites aa_1 et bb_1, quand bb_1 se rapproche de aa_1 pour se confondre avec aa_1. Alors b est en a et b_1 est en a_1, et l'égalité précédente donne

$$\overline{\mathrm{I}a}^2 = \overline{\mathrm{I}a_1}^2$$

ou

$$\mathrm{I}a = \mathrm{I}a_1.$$

Le lieu cherché est tangent aux droites telles que aa_1 en leurs milieux; donc c'est une *hyperbole* ayant pour asymptotes les droites $\alpha\mathrm{P}$ et $\alpha\mathrm{Q}$.

5. Enfin, après avoir trouvé la relation (1), on peut encore dire, en désignant par λ et μ les longueurs αa et αa_1, en prenant $\alpha\mathrm{Q}$ et $\alpha\mathrm{P}$ pour axes :

L'équation de aa_1 est

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0;$$

comme

$$\lambda\mu = \frac{h^2}{\cos\beta},$$

cette équation devient

$$\lambda^2 y \cos\beta - \lambda h^2 + h^2 x = 0.$$

La dérivée du premier membre, prise par rapport à λ et égalée à zéro, donne

$$2\lambda y \cos\beta - h^2 = 0.$$

L'élimination de λ entre ces deux dernières équations donne l'équation du lieu cherché. On trouve

$$xy = \frac{h^2}{4\cos\beta}.$$

Ce lieu est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites αP et αQ.

6. *Ordre du cône enveloppe.* — Le cône enveloppe ayant pour trace horizontale une conique est un cône du second ordre. Un de ses axes est $s'\alpha$; les deux autres sont les droites horizontales, intersections du plan horizontal mené par s' et des plans passant par $s'\alpha$ et par les axes de l'hyperbole, ou des plans bissecteurs des plans donnés. On reconnaît *a priori* que la droite $s'a$ est un axe du cône, en remarquant que les traces telles que aa_1 sont deux à deux parallèles et à égale distance de α, et que par suite le point α est un centre de la courbe enveloppe des traces.

7. *Ordre du cône enveloppe, trouvé par la Géométrie analytique.* — Prenons des plans coordonnés rectangulaires ayant pour origine le sommet s' du cône enveloppe; $Xs'Z$ est l'un des plans donnés, ici le plan vertical de projection; $Xs'Y$ est parallèle au plan horizontal de projection. Le second plan donné P passe par $s'Z$ et fait avec $Xs'Z$ un angle aigu β. Soient $s'a$ et $s'A_1$ deux droites rectangulaires situées dans les plans $Xs'Z$ et P. Les équations de $s'a$ et de $s'A_1$ sont

(3) $$x = az, \quad y = 0,$$

(4) $$x = a'z, \quad y = a'mz.$$

Cette dernière équation résulte de l'équation

$$y = mx,$$

m étant égal à tang β.

Comme la projection $s'a_1$ de $s'A_1$ sur $Xs'Z$ est perpendiculaire à $s'a$, les paramètres variables a et a' sont liés par la relation

$$(5) \qquad aa' + 1 = 0.$$

Soit

$$(6) \qquad Ax + By + z = 0$$

l'équation du plan déterminé par les droites $s'a$ et $s'A_1$. Ce plan coupant $Xs'Z$ selon $s'a$, on trouve que

$$(7) \qquad Aa + 1 = 0;$$

ce plan contenant $s'A_1$, on a la relation suivante

$$(8) \qquad Aa' + Ba'm + 1 = 0.$$

L'équation du plan (6) est, à cause des relations (5), (7) et (8),

$$(9) \qquad -mx + (1 + a^2)y + amz = 0.$$

Elle renferme un paramètre variable a. L'équation dérivée de (9) est

$$(10) \qquad 2ay + mz = 0.$$

L'équation du cône enveloppe des plans (9), obtenue en éliminant a entre (9) et (10), est

$$(11) \qquad 4y^2 - m^2z^2 - 4mxy = 0.$$

Ce cône est donc du second ordre. La projection sur $Xs'Y$ de la section du cône par le plan $z + h = 0$ a pour équation

$$(12) \qquad 4y^2 - 4mxy - m^2h^2 = 0.$$

C'est une hyperbole; son centre est s'; ses asymptotes sont données par les équations $y = 0$ et $y = mx$. L'hyperbole située dans le plan $z + h = 0$ est égale à celle dont l'équation est (12); ses asymptotes sont αQ et αP. Par une transformation de coordonnées, l'équation (12) donne l'équation (2) de l'hyperbole trace rapportée à ses asymptotes.

8. La relation connue $(A - A'')(A' - A'') - B''^2 = 0$ montre que le cône enveloppe ne peut être de révolution que quand $m = 0$; le cône se réduit au plan double $Xs'Z$.

Quand les plans donnés sont rectangulaires, m égale l'infini, l'équation du cône enveloppe n'est satisfaite que pour les systèmes de valeurs $y = 0$ et $z = 0$ ou $x = 0$ et $z = 0$; le cône se réduit à l'axe $s'X$ et à l'axe $s'Y$. Ce résultat pouvait être prévu; en effet, les plans dont on cherche l'enveloppe forment deux groupes composés chacun d'une infinité de plans passant par les perpendiculaires menées en s', soit au premier plan, soit au second.