NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur le développement des logarithmes et des exponentielles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 241-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__241_0>

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES LOGARITHMES ET DES EXPONENTIELLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

Considérons le développement d'une fonction $f(x)$ suivant les puissances ascendantes d'une fonction quelconque $\varphi(x)$ de la variable

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1\varphi(x) \\ &\quad + A_2\varphi(x)^2 + \ldots + A_n\varphi(x)^n + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et proposons-nous de trouver le développement de $\log f(x)$ suivant les puissances de $\varphi(x)$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \log f(x) &= a_0 + a_1\varphi(x) \\ &\quad + a_2\varphi(x)^2 + \ldots + a_n\varphi(x)^n + \ldots, \end{aligned}\right.$$

en supposant ces deux développements convergents pour la fonction $\varphi(x)$ choisie.

On voit d'abord immédiatement que

$$a_0 = \log A_0.$$

Cherchons maintenant la valeur d'un coefficient quelconque a_n. A cet effet, dérivons l'expression (1) par rapport à x

$$\begin{aligned} f'(x) = A_1\varphi'(x) + 2A_2\varphi(x)\varphi'(x) + \ldots \\ + nA_n\varphi(x)^{n-1}\varphi'(x) + \ldots. \end{aligned}$$

Par suite,

$$(3)\quad \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'(x)[A_1 + 2A_2\varphi(x) + \ldots + nA_n\varphi(x)^{n-1} + \ldots]}{A_0 + A_1\varphi(x) + \ldots + A_n\varphi(x)^n + \ldots}. \right.$$

Dérivons maintenant l'expression (2) par rapport à x

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\log f(x)}{dx} &= a_1\varphi'(x) + 2a_2\varphi(x)\varphi'(x) + \ldots \\ &\quad + na_n\varphi(x)^{n-1}\varphi'(x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de (3) et (4) étant identiques, il en est de même des seconds; nous aurons donc, après avoir divisé de part et d'autre par $\varphi'(x)$,

$$\begin{aligned}
&A_1 + 2A_2\varphi(x) + \ldots + nA_n\varphi(x)^{n-1} + \ldots \\
&\quad = [a_1 + 2a_2\varphi(x) + \ldots + na_n\varphi(x)^{n-1} + \ldots] \\
&\quad \times [A_0 + A_1\varphi(x) + \ldots + A_n\varphi(x)^n + \ldots].
\end{aligned}$$

L'identification des deux membres donne

$$[\alpha]\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= a_1A_0, \\
2A_2 &= 2a_2A_0 + a_1A_1, \\
3A_3 &= 3a_3A_0 + 2a_2A_1 + a_1A_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
nA_n &= na_nA_0 + (n-1)a_{n-1}A_1, \\
&\quad + (n-2)a_{n-2}A_2 + \ldots + a_1A_{n-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Pour tirer de là la valeur de a_n, prenons les n premières équations et écrivons-les comme suit

$$\begin{array}{llllll}
A_0a_1 & + 0a_2 & + 0a_3 & + \ldots + 0a_n & = & A_1, \\
A_1a_1 & + 2A_0a_2 & + 0a_3 & + \ldots + 0a_n & = & 2A_2, \\
A_2a_1 & + 2A_1a_2 & + 3A_0a_3 & + \ldots + 0a_n & = & 3A_3, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots, \\
A_{n-1}a_1 & + 2A_{n-2}a_2 & + 3A_{n-3}a_3 & + \ldots + nA_0a_n & = & nA_n.
\end{array}$$

De là nous tirerons pour la valeur de a_n, en remarquant que le déterminant qui forme le dénominateur se réduit à sa diagonale,

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix}
A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_1 \\
A_1 & 2A_0 & 0 & \ldots & 0 & 2A_2 \\
A_2 & 2A_1 & 3A_0 & \ldots & 0 & 3A_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{n-2} & 2A_{n-3} & 3A_{n-4} & \ldots & (n-1)A_0 & (n-1)A_{n-1} \\
A_{n-1} & 2A_{n-2} & 3A_{n-3} & \ldots & (n-1)A_1 & nA_n
\end{vmatrix}}{1.2.3\ldots nA_0^n}.$$

Telle est la formule qui résout le problème.

Comme application, nous allons en déduire le développement classique de $\log(1+x)$.

Dans ce cas, nous avons

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1.$$

Tous les autres coefficients A sont nuls. Nous avons alors

$$a_0 = \log A_0 = 0,$$

et, par application de la formule précédente,

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}}{1.2.3\dots n}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\, 1.2.3\dots(n-1)}{1.2.3\dots n}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

C'est bien la formule connue.

Il est parfois plus facile de développer le logarithme d'une fonction que cette fonction elle-même ; c'est ce qui a lieu en particulier pour le développement de l'intégrale eulérienne $\Gamma(x)$, suivant les puissances croissantes de $(x-1)$. On peut donc avoir à traiter le problème inverse de celui que nous venons de résoudre. On a d'abord

$$A_0 = e^{a_0}.$$

Il faut maintenant des équations $[\alpha]$ tirer la valeur de A_n en fonction des a. A cet effet, nous prendrons les

n premières de ces équations et nous les écrirons

$$\begin{array}{rrrl}
A_1 + & 0A_2 + & 0A_3 + \ldots + 0A_n = & a_1 A_0, \\
-a_1 A_1 + & 2A_2 + & 0A_3 + \ldots + 0A_n = & 2a_2 A_0, \\
-2a_2 A_1 - & a_1 A_2 + & 3A_3 + \ldots + 0A_n = & 3a_3 A_0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\end{array}$$

$$-(n-1)a_{n-1}A_1 - (n-2)a_{n-2}A_2 - (n-3)a_{n-3}A_3 + \ldots + nA_n = na_nA_0,$$

d'où nous tirons

$$A_n = \frac{\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\
-a_1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 2a_2 \\
-2a_2 & -a_1 & 3 & \ldots & 0 & 3a_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-(n-2)a_{n-2} & -(n-3)a_{n-3} & -(n-4)a_{n-4} & \ldots & n-1 & (n-1)a_{n-1} \\
-(n-1)a_{n-1} & -(n-2)a_{n-2} & -(n-3)a_{n-3} & \ldots & -a_1 & na_n
\end{vmatrix} e^{na_0}}{1.2.3\ldots n}.$$

Comme vérification de cette formule, nous allons en déduire le développement de e^x. Il suffit de faire

$$a_1 = 1,$$

et tous les autres a nuls, ce qui donne

$$A_n = \frac{\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
-1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\
. & . & . & \ldots & . & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0
\end{vmatrix}}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

qui est bien la formule connue.