MORET-BLANC

Solution des questions de licence proposées au concours d'agrégation de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 230-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__230_0>

SOLUTION DES QUESTIONS DE LICENCE PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1880;

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Intégrer les équations différentielles simultanées*

$$\frac{dx}{dt} = ax + b''y + b'z,$$

$$\frac{dy}{dt} = b''x + a'y + bz,$$

$$\frac{dz}{dt} = b'x + by + a''z,$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont des constantes réelles données, et x, y, z des fonctions inconnues de la variable t.

Ces équations étant homogènes en x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, si l'on trouve trois systèmes de valeurs particulières x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 qui les vérifient, on y satisfera encore en posant

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3,$$

C_1, C_2, C_3 étant trois constantes arbitraires. Ces nouvelles valeurs, renfermant trois constantes arbitraires, seront les intégrales générales des équations proposées.

Pour trouver trois solutions particulières, posons

$$x = e^{\rho t}, \quad y = \mu e^{\rho t}, \quad z = \nu e^{\rho t},$$

ρ, μ, ν étant des constantes qu'il s'agit de déterminer.

Ces valeurs, substituées dans les équations, donnent, en supprimant le facteur $e^{\rho t}$,

$$a-\rho+b''\mu+b'\nu=0,$$
$$b''+(a'-\rho)\mu+b\nu=0,$$
$$b'+b\mu+(a''-\rho)\nu=0.$$

L'élimination de μ et ν entre ces équations donne

$$\begin{vmatrix} a-\rho & b'' & b' \\ b'' & a'-\rho & b \\ b' & b & a''-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation, identique à l'équation en S de la Géométrie analytique, a, comme on sait, ses trois racines réelles, que l'on calculera trigonométriquement, quand on connaîtra les valeurs numériques des coefficients.

Désignons-les par ρ_1, ρ_2, ρ_3; deux quelconques des équations précédentes donneront les valeurs correspondantes μ_1, μ_2, μ_3; ν_1, ν_2, ν_3.

Les intégrales générales des équations proposées seront

$$x=C_1e^{\rho_1 t}+C_2e^{\rho_2 t}+C_3e^{\rho_3 t},$$
$$y=C_1\mu_1e^{\rho_1 t}+C_2\mu_2e^{\rho_2 t}+C_3\mu_3e^{\rho_3 t},$$
$$z=C_1\nu_1e^{\rho_1 t}+C_2\nu_2e^{\rho_2 t}+C_3\nu_3e^{\rho_3 t}.$$

2. *On considère un axe vertical* Oz, *autour duquel tourne d'après une loi déterminée, mais inconnue, un tube rectiligne* OA, *de section infiniment petite, qui rencontre l'axe fixe en* O *et fait avec lui un angle constant* θ; *dans l'intérieur du tube peut se mouvoir sans frottement un point* M :

1° *On demande quelles doivent être, d'une part, la loi de rotation du tube, de l'autre, les circonstances initiales pour que la distance r du point* M *au point* O *soit, à chaque instant t, donnée par la formule*

$$r=h(t+\alpha)^2.$$

2° *Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi précédemment trouvée, ne faisant d'ailleurs aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on demande d'étudier le mouvement du point pesant dans le tube.*

1° L'accélération du mouvement du mobile dans le tube est la somme algébrique des composantes suivant la direction du tube, de la pesanteur et de l'accélération centrifuge : l'accélération centrifuge composée, étant perpendiculaire au tube, est détruite. On aura donc, en supposant le mobile M au-dessus du point O,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g\cos\theta + r\sin\theta\,\frac{d\omega^2}{dt^2},$$

ω étant l'angle que le plan ZOA fait avec sa position initiale.

Si le mobile était au-dessous du point O, il suffirait de changer le signe de g, r étant positif de O vers M.

D'après la loi énoncée, on a

$$r = k(t+\alpha)^2, \quad \frac{dr}{dt} = 2k(t+\alpha), \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = 2k.$$

L'équation précédente devient

$$2k = -g\cos\theta + k\sin\theta(t+\alpha)^2\,\frac{d\omega^2}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\dfrac{2k+g\cos\theta}{k\sin\theta}}}{t+\alpha}.$$

Telle doit être la vitesse de rotation du tube; elle est en raison inverse du temps compté à partir d'une origine antérieure de α aux circonstances initiales.

Pour $t = 0$, on doit avoir en outre

$$r_0 = k\alpha^2, \quad v_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 2k\alpha,$$

c'est-à-dire que la position et la vitesse initiale du mobile dans le tube doivent être les mêmes que s'il était parti sans vitesse initiale du point O avec l'accélération $2k$, à cette époque antérieure, le tube restant immobile.

Il est facile d'avoir l'équation de la courbe décrite sur un plan perpendiculaire à l'axe par la projection du mobile :

$$\rho = r\sin\theta = k\sin\theta(t+\alpha)^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k+g\cos\theta}{k\sin\theta}}\,\mathrm{L}\frac{t+\alpha}{\alpha},$$

d'où

$$t+\alpha = \alpha e^{\omega\sqrt{\frac{k\sin\theta}{2k+g\cos\theta}}}.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on a

$$\rho = k\alpha^2\sin\theta\, e^{2\omega\sqrt{\frac{k\sin\theta}{2k+g\cos\theta}}},$$

équation d'une spirale logarithmique dont l'angle a pour tangente $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k+g\cos\theta}{k\sin\theta}}$.

2° Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi trouvée

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{2k+g\cos\theta}{k\sin\theta}}}{t+\alpha},$$

et ne faisant aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on a, pour déterminer le mouvement du mobile dans le tube, l'équation différentielle

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{2k+g\cos\theta}{k(t+\alpha)^2}\,r = -g\cos\theta.$$

On en connait une intégrale particulière

$$r_1 = k(t+\alpha)^2;$$

on aura l'intégrale générale en lui ajoutant l'intégrale de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{2k + g\cos\theta}{k(t+\alpha)^2}\, r = 0.$$

Pour intégrer cette dernière équation, posons

$$r = e^{\int u\,dt},$$

elle devient

$$\frac{du}{dt} + u^2 = \frac{2k + g\cos\theta}{k(t+\alpha)^2},$$

ou, en posant $t + \alpha = t_1$,

$$\frac{du}{dt_1} + u^2 = \frac{2 + \frac{g}{k}\cos\theta}{t_1^2},$$

équation qui rentre dans celle de Riccati.

Si l'on pose

$$u = \frac{z+1}{t_1},$$

elle devient

$$\frac{dz}{\frac{9}{4} + \frac{g}{k}\cos\theta - \left(\frac{1}{2} + z\right)^2} = \frac{dt_1}{t_1};$$

d'où, en posant, pour abréger, $\frac{9}{4} + \frac{g}{k}\cos\theta = m^2$, et intégrant,

$$\mathrm{L}\frac{m + \frac{1}{2} + z}{m - \frac{1}{2} - z} = 2m\,\mathrm{L}\,t_1 + \mathrm{LC},$$

$$\frac{1}{2} + z = \frac{m(\mathrm{C}t_1^m - t_1^{-m})}{\mathrm{C}t_1^m + t_1^{-m}},$$

$$u\,dt_1 = \frac{m(\mathrm{C}t_1^{m-1} - t_1^{-m-1})dt_1}{\mathrm{C}t_1^m + t_1^{-m}} + \frac{1}{2}\frac{dt_1}{t_1},$$

$$\int u\,dt_1 = \mathrm{L}(\mathrm{C}t_1^m + t_1^{-m}) + \mathrm{L}\,t_1^{\frac{1}{2}} + \mathrm{LB}.$$

$$e^{\int u\,dt_1} = \mathrm{B}t_1^{\frac{1}{2}}(\mathrm{C}t_1^m + t_1^{-m}) = e^{\int u\,dt},$$

C et B étant des constantes arbitraires.

Enfin, posant $BC = A$, on a

$$r = k(t+\alpha)^2 + A(t+\alpha)^{m+\frac{1}{2}} + B(t+\alpha)^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)},$$

$$v = \frac{dr}{dt} = 2k(t+\alpha) + \left(m+\frac{1}{2}\right)A(t+\alpha)^{m-\frac{1}{2}} - \left(m-\frac{1}{2}\right)B(t+\alpha)^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)},$$

Si r_0 et v_0 sont les valeurs initiales de r et de v, on a

$$r_0 = k\alpha^2 + A\alpha^{m+\frac{1}{2}} + B\alpha^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)},$$

$$v_0 = 2k\alpha + \left(m+\frac{1}{2}\right)A\alpha^{m-\frac{1}{2}} - \left(m-\frac{1}{2}\right)B\alpha^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)},$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)(r_0 - k\alpha^2) + \alpha(v_0 - 2k\alpha)}{2m\alpha^{m+\frac{1}{2}}},$$

$$B = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)(r_0 - k\alpha^2) - \alpha(v_0 - 2k\alpha)}{2m\alpha^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Discussion. — On a

$$m > \frac{3}{2}, \quad m + \frac{1}{2} > 2, \quad m - \frac{1}{2} > 1.$$

Le terme du degré le plus élevé dans la valeur de r ou de v est donc celui qui a pour coefficient A ou $\left(m+\frac{1}{2}\right)A$,

De plus, t croissant, les deux premiers termes dans les expressions de r et de v croissent, et le dernier décroît.

Donc si A est positif, r et v croîtront indéfiniment à partir de leurs valeurs initiales r_0 et v_0; le mobile montera indéfiniment avec une vitesse croissante.

Si A est négatif, r et v finiront par devenir négatifs; par conséquent, si r_0 et v_0 sont positifs, le mobile montera jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle; on déterminera le temps t_1 correspondant, en égalant à zéro la valeur de $\frac{dr}{dt}$, puis on reportera cette valeur dans l'expression de r, ce qui donnera le point le plus haut. A partir de ce moment, le mobile redescendra, passera au-dessous du point O, et s'en éloignera indéfiniment vers le bas avec une vitesse croissante.

Pour établir la loi de rotation du tube, nous avons supposé que le mobile était au-dessus du point O.

S'il était au-dessous, il faudrait dans l'expression de $\frac{d\omega}{dt}$ changer g en $-g$, la direction positive étant vers le bas. On aurait à faire un calcul tout à fait semblable au précédent.