Nouvelles annales de mathématiques

E. Henry

Solution d'une question d'analyse proposée au concours d'agrégation de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 220-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__220_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1880;

PAR M. E. HENRY,

Professeur au Lycée d'Angers.

Soient u une fonction donnée d'une variable α, et u' sa dérivée. Soit $\varphi(\beta)$ une fonction donnée d'une autre variable β. On considère une surface S telle que les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un quelconque de ses points s'expriment par les formules

$$x = (u + \beta)\cos\alpha - u'\sin\alpha,$$
$$y = (u + \beta)\sin\alpha + u'\cos\alpha,$$
$$z = \varphi(\beta).$$

1° *Démontrer que les projections sur le plan $x\,O\,y$ des sections de la surface par les plans parallèles à $x\,O\,y$ ont même développée;*

2° *Démontrer que les normales à la surface S aux différents points d'une quelconque de ces sections forment une surface développable, et déterminer l'arête de rebroussement de cette surface;*

3° *Trouver les lignes de courbure de la surface S, et les rayons de courbure principaux en un quelconque de ses points.*

1° Les coordonnées ξ, η du centre de courbure d'une courbe plane sont données par les formules

$$\xi = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}, \quad \eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

dans lesquelles x et y représentent les coordonnées du point de la courbe. Nous allons calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'hypothèse de β constante, y étant une fonction de α, qui elle-même est fonction de la variable indépendante x. Différentions, à cet effet, dans cette hypothèse, les deux premières des équations données. Nous aurons

$$1 = -(u + \beta + u'')\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = (u + \beta + u'')\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dx},$$

u'' étant la dérivée de u' par rapport à α. On en tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Différentions cette dernière relation par rapport à x. Nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx},$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(u + \beta + u'')\sin^3\alpha}.$$

Portant ces valeurs dans les expressions de ξ et de η, nous aurons

$$\begin{aligned}\xi = {} & (u + \beta)\cos\alpha - u'\sin\alpha \\ & - \left[1 + \frac{1}{\operatorname{tang}^2\alpha}\right](u + \beta + u'')\sin^3\alpha\,\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha};\end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \qquad \xi = -(u'\sin\alpha + u''\cos\alpha).$$

On a de même

$$\begin{aligned}\eta = {} & (u + \beta)\sin\alpha + u'\cos\alpha \\ & - \left[1 + \frac{1}{\operatorname{tang}^2\alpha}\right](u + \beta + u'')\sin^3\alpha;\end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

(2) $$\eta = u' \cos\alpha - u'' \sin\alpha.$$

Les formules (1) et (2) ne contiennent pas β. Donc la courbe qu'elles représentent quand α varie ne dépend pas de la hauteur du plan de cette courbe au-dessus de celui des xy.

Calculons le rayon de courbure. On a

$$R = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$
$$= \mp \left[1 + \frac{1}{\tan g^2\alpha}\right]^{\frac{3}{2}} (u + \beta + u'') \sin^3\alpha;$$

ou, en simplifiant,

(3) $$R = \mp (u + \beta + u'').$$

La différence constante entre les rayons de courbure en deux points correspondants de deux sections est précisément égale à la variation de β. On prendra celui des deux signes ± qui rend positive la valeur de R. Cela dépendra du signe de $u + \beta + u''$.

2° En posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, on sait que l'équation différentielle des lignes de courbure est

(4) $$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Il faut vérifier que cette équation est satisfaite par les coordonnées des divers points d'une même section parallèle au plan xOy. Calculons les quantités p et q, et pour cela différentions les équations données tour à tour par rapport à x et à y, prises comme variables indépendantes, en considérant α et β comme fonctions de x et de y. Nous aurons

$$1 = \cos\alpha \frac{d\beta}{dx} - (u + \beta + u'')\sin\alpha \frac{d\alpha}{dx},$$

$$0 = \sin\alpha \frac{d\beta}{dx} + (u + \beta + u'')\cos\alpha \frac{d\alpha}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(\beta)\frac{d\beta}{dx},$$

$$0 = \cos\alpha \frac{d\beta}{dy} - (u + \beta + u'')\sin\alpha \frac{d\alpha}{dy},$$

$$1 = \sin\alpha \frac{d\beta}{dy} + (u + \beta + u'')\cos\alpha \frac{d\alpha}{dy},$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi'(\beta)\frac{d\beta}{dy}.$$

De ces équations, on tire

$$\frac{d\beta}{dx} = \cos\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\sin\alpha}{u + \beta + u'},$$

$$\frac{d\beta}{dy} = \sin\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\cos\alpha}{u + \beta + u''},$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \varphi'(\beta)\cos\alpha, \quad q = \frac{dz}{dy} = \varphi'(\beta)\sin\alpha.$$

Si maintenant on considère un point se déplaçant sur une section parallèle au plan xOy, on devra supposer dz nul, et calculer dp et dq dans l'hypothèse de β constant et de α seul variable. On aura ainsi

$$dp = -\varphi'(\beta)\sin\alpha\, d\alpha, \quad dq = \varphi'(\beta)\cos\alpha\, d\alpha.$$

On a d'ailleurs, dans les mêmes hypothèses,

$$dx = -(u + \beta + u'')\sin\alpha\, d\alpha,$$
$$dy = (u + \beta + u'')\cos\alpha\, d\alpha.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (4), on a

$$\frac{-(u+\beta+u'')\cos\alpha\,d\alpha}{-\varphi'(\beta)\sin\alpha\,d\alpha}=\frac{(u+\beta+u'')\cos\alpha\,d\alpha}{\varphi'(\beta)\cos\alpha\,d\alpha}.$$

Cette équation est identique. Ses deux membres ont pour valeur commune $\frac{u+\beta+u''}{\varphi'(\beta)}$. Donc les normales à la surface S aux divers points de la section considérée forment bien une surface développable.

Cherchons l'arête de rebroussement de cette surface. Les équations d'une génératrice étant

$$(5)\qquad \begin{cases} X-x+p(Z-z)=0,\\ Y-y+q(Z-z)=0,\end{cases}$$

cherchons celles de la génératrice infiniment voisine, dans l'hypothèse de $dz=0$. Nous aurons

$$\begin{cases} X-x-dx+p(Z-z)+dp(Z-z)=0,\\ Y-y-dy+q(Z-z)+dq(Z-z)=0.\end{cases}$$

En tenant compte des précédentes, ces deux dernières se réduisent à

$$-dx+dp(Z-z)=0,$$
$$-dy+dq(Z-z)=0.$$

Et comme, pour le cas particulier actuel, on a $\frac{dx}{dp}=\frac{dy}{dq}$, ces deux dernières se réduisent à une seule et donnent

$$(6)\qquad Z=z+\frac{dx}{dp}.$$

En portant dans les équations (5), on a

$$(7)\qquad X=x-p\frac{dx}{dp},\quad Y=y-q\frac{dx}{dp}.$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs tirées des équations de la surface S, et dx, dy, p, q, dp, dq par les valeurs que nous venons de calculer, on trouve les équations qui définissent l'arête de rebroussement avec les variables α et β :

$$X = -(u' \sin\alpha + u'' \cos\alpha),$$
$$Y = u' \cos\alpha - u'' \sin\alpha,$$
$$Z = \varphi(\beta) + \frac{u + \beta + u''}{\varphi'(\beta)}.$$

On voit que cette arête de rebroussement se projette sur le plan xOy suivant la courbe définie pour les équations (1) et (2).

Les cosinus directeurs de la tangente à l'arête de rebroussement sont

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Ce dernier a pour valeur $\frac{1}{\sqrt{1+[\varphi'(\beta)]^2}}$, quantité constante pour une même section parallèle à xOy. Donc la tangente à l'arête de rebroussement faisant un angle constant avec Oz, cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre à base quelconque dont les génératrices sont parallèles à Oz.

3° On pourrait, pour trouver les lignes de courbure de la surface S, appliquer la méthode générale; mais il est plus simple de remarquer que, d'après ce qui précède, l'un des systèmes est formé des sections parallèles à xOy. L'autre système, formé de lignes orthogonales aux premières, se projette sur le plan xOy suivant les trajectoires orthogonales des projections sur ce plan des courbes du premier système. Ces dernières, ayant même développée, ont pour trajectoires orthogonales les tangentes à la courbe définie pour les équations (1) et (2), et les plans menés par ces tangentes perpendiculairement à xOy coupent la surface S suivant les lignes de courbure du second système.

En traitant la question par le calcul, on devra calculer les quantités dx, dy, dz, p, q, dp, dq sans faire aucune hypothèse particulière, en regardant z, α, β comme fonctions des variables indépendantes x et y. On aura ainsi

$$\begin{aligned}
dx &= \cos\alpha\, d\beta - (u + \beta + u'') \sin\alpha\, d\alpha,\\
dy &= \sin\alpha\, d\beta + (u + \beta + u'') \cos\alpha\, d\alpha,\\
dz &= \varphi'(\beta)\, d\beta,\\
p &= \varphi'(\beta) \cos\alpha,\\
q &= \varphi'(\beta) \sin\alpha,\\
dp &= \varphi''(\beta) \cos\alpha\, d\beta - \varphi'(\beta) \sin\alpha\, d\alpha,\\
dq &= \varphi''(\beta) \sin\alpha\, d\beta + \varphi'(\beta) \cos\alpha\, d\alpha.
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\alpha\, d\beta - (u + \beta + u'') \sin\alpha\, d\alpha + [\varphi'(\beta)]^2 \cos\alpha\, d\beta}{\varphi''(\beta) \cos\alpha\, d\beta - \varphi'(\beta) \sin\alpha\, d\alpha}\\
&\quad = \frac{\sin\alpha\, d\beta + (u + \beta + u'') \cos\alpha\, d\alpha + [\varphi'(\beta)]^2 \sin\alpha\, d\beta}{\varphi''(\beta) \sin\alpha\, d\beta + \varphi'(\beta) \cos\alpha\, d\alpha}
\end{aligned}$$

Toutes réductions faites, cette équation donne

$$\{(u + \beta + u'')\varphi''(\beta) - \varphi'(\beta) - [\varphi'(\beta)^2]\}\, d\alpha\, d\beta = 0.$$

En supprimant le facteur entre accolades qui ne donne aucune constante arbitraire, on a

$$d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad d\beta = 0.$$

La solution $d\beta = 0$ donne $\beta = \text{const.}$, c'est-à-dire $z = \text{const.}$ On retrouve les sections de la surface S par des plans parallèles à xOy. La solution $d\alpha = 0$ donne $\alpha = \text{const.}$ En éliminant β entre les deux premières équations de la surface S, nous trouverons l'équation

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = u',$$

pour représenter les lignes de l'autre système. Ces lignes sont bien dans un plan perpendiculaire au plan xOy. Il est facile de voir que la trace de ce plan sur xOy touche la courbe définie par les équations (1) et (2). De ces équations (1) et (2), on tire, en effet, en les différentiant,

$$d\xi = -(u'\cos\alpha + u''\cos\alpha)\,d\alpha,$$
$$d\eta = -(u'\sin\alpha + u''\sin\alpha)\,d\alpha.$$

D'où $\frac{d\eta}{d\xi} = \tang\alpha$. L'équation de la tangente à cette courbe est donc

$$y - \eta = (x - \xi)\tang\alpha,$$

ou bien

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \eta\cos\alpha - \xi\sin\alpha.$$

Or, en remplaçant ξ et η par leurs valeurs, on trouve que cette équation devient en effet

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = u'.$$

Pour trouver maintenant les rayons de courbure principaux en un point de la surface, calculons les quantités $r = \frac{dp}{dx}$, $s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, $t = \frac{dq}{dy}$, en considérant toujours α et β comme des fonctions de x et y prises comme variables indépendantes. On a, en tenant compte des formules précédemment trouvées,

$$r = \varphi''(\beta)\cos\alpha\,\frac{d\beta}{dx} - \varphi'(\beta)\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dx}$$
$$= \varphi''(\beta)\cos^2\alpha + \frac{\varphi'(\beta)\sin^2\alpha}{u+\beta+u''},$$
$$s = \varphi''(\beta)\cos\alpha\,\frac{d\beta}{dy} - \varphi'(\beta)\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dy}$$
$$= \varphi''(\beta)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\varphi'(\beta)\sin\alpha\cos\alpha}{u+\beta+u''},$$
$$t = \varphi'(\beta)\sin^2\alpha\,\frac{d\beta}{dy} + \varphi'(\beta)\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dy}$$
$$= \varphi''(\beta)\sin^2\alpha + \frac{\varphi'(\beta)\cos^2\alpha}{u+\beta+u''}.$$

Nous allons remplacer p, q, r, s, t par leurs valeurs dans l'équation qui donne les rayons de courbure principaux en un point d'une surface

$$(rt - s^2)R^2 - [(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs] \times \sqrt{1+p^2+q^2}\,R + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Nous aurons

$$\frac{\varphi'(\beta)\varphi''(\beta)}{u+\beta+u}R^2 - \left[\varphi''(\beta) + \frac{\varphi'(\beta)+[\varphi'(\beta)]^3}{u+\beta+u''}\right] \times \sqrt{1+[\varphi'(\beta)]^2}\,R + \left\{1+[\varphi'(\beta)]^2\right\}^2 = 0.$$

La quantité soumise au radical dans la valeur de R est

$$\left\{\varphi''^2(\beta) + 2\varphi'(\beta)\varphi''(\beta)\frac{1+\varphi'^2(\beta)}{u+\beta+u''} + \varphi'^2(\beta)\frac{[1+\varphi'^2(\beta)]^2}{(u+\beta+u'')^2}\right\}[1+\varphi'^2(\beta)]$$
$$- 4\varphi'(\beta)\varphi''(\beta)\frac{[1+\varphi'^2(\beta)]^2}{u+\beta+u''}.$$

C'est le carré de la quantité

$$\left\{\varphi''(\beta) - \frac{\varphi'(\beta)[1+\varphi'^2(\beta)]}{u+\beta+u''}\right\}\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}.$$

Donc on a

$$R = \frac{\left[\varphi''(\beta) + \varphi'(\beta)\,\frac{1+\varphi'^2(\beta)}{u+\beta+u''}\right]\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)} \pm \left[\varphi''(\beta) - \varphi'(\beta)\,\frac{1+\varphi'^2(\beta)}{u+\beta+u''}\right]\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}}{\frac{2\varphi'(\beta)\varphi''(\beta)}{u+\beta+u''}}.$$

Avec le signe $+$, on a

$$R_1 = \frac{\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}}{\varphi'(\beta)}(u+\beta+u'').$$

Avec le signe $-$, on a

$$R_2 = \frac{[1+\varphi'^2(\beta)]\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}}{\varphi''(\beta)}.$$

La normale à la surface fait avec Oz un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}}$. Le cosinus de R_1 avec le plan xOy est donc $\frac{\varphi'(\beta)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}}$, et la projection de R_1 sur ce plan a pour valeur $\frac{R_1\varphi'(\beta)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\beta)}}$, c'est-à-dire $u+\beta+u''$. C'est la valeur du rayon de courbure de la section parallèle au plan xOy donné par la formule (3). Donc R_1 est la valeur du rayon de courbure des sections normales principales tangentes aux lignes de courbures parallèles au plan xOy, et R_2 est par suite le rayon de courbure des sections principales de l'autre système.