Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Brisse

Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre en coordonnées obliques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 207-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__207_0>

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES SURFACES DU SECOND ORDRE EN COORDONNÉES OBLIQUES;

PAR M. CH. BRISSE.

---

1. On sait que les formules de transformation de coordonnées d'axes obliques à axes obliques sont

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x+y\cos\nu+z\cos\mu=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha'+z'\cos\alpha'',\\ x\cos\nu+y+z\cos\lambda=x'\cos\beta+y'\cos\beta'+z'\cos\beta'',\\ x\cos\mu+y\cos\lambda+z=x'\cos\gamma+y'\cos\gamma'+z'\cos\gamma'', \end{array}\right.$$

α, β, γ désignant les angles que fait le nouvel axe des x, α', β', γ' ceux que fait le nouvel axe des y et α'', β'', γ'' ceux que fait le nouvel axe des z avec les anciens axes des x, des y et des z.

Mais il y a lieu de remarquer la forme simple que prennent ces formules lorsque, au lieu des angles α, β, γ, on introduit les coordonnées a, b, c d'un point pris sur l'axe des x' à l'unité de distance de l'origine, et de même pour α', β', γ', α'', β'', γ''.

Le théorème des projections donne, en effet,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=a+b\cos\nu+c\cos\mu,\\ \cos\beta=a\cos\nu+b+c\cos\lambda,\\ \cos\gamma=a\cos\mu+b\cos\lambda+c, \end{array}\right.$$

et des expressions analogues pour $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$. Substituant ces valeurs dans les seconds membres des formules (1), elles deviennent

$$
\begin{aligned}
&x + y\cos\nu + z\cos\mu \\
&\quad = ax' + a'y' + a''z' \\
&\qquad + (bx' + b'y' + b''z')\cos\nu + (cx' + c'y' + c''z')\cos\mu, \\
&x\cos\nu + y + z\cos\lambda \\
&\quad = (ax' + a'y' + a''z')\cos\nu \\
&\qquad + bx' + b'y' + b''z' + (cx' + c'y' + c''z')\cos\lambda, \\
&x\cos\mu + y\cos\lambda + z \\
&\quad = (ax' + a'y' + a''z')\cos\mu \\
&\qquad + (bx' + b'y' + b''z')\cos\lambda + cx' + c'y' + c''z'.
\end{aligned}
$$

Mais le déterminant des coefficients des premiers membres est, comme on sait, différent de zéro : les valeurs de x, y et z sont donc uniques, et, comme on aperçoit immédiatement les solutions

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= ax' + a'y' + a''z', \\
y &= bx' + b'y' + b''z', \\
z &= cx' + c'y' + c''z',
\end{aligned}
\right.
$$

le système (1) est résolu.

2. Pour pouvoir appliquer les formules (3) d'une façon simple, il est nécessaire de connaître l'angle de deux droites en coordonnées obliques.

On sait qu'en désignant par α, β, γ les angles que fait l'une des droites avec les axes, et par α', β', γ' les angles que fait l'autre, l'angle V des deux droites est donné par l'équation

$$
\begin{vmatrix}
1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\
\cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\
\cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\
\cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & \cos V
\end{vmatrix} = 0.
$$

Remplaçant dans ce déterminant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par les valeurs (2) et $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ par les valeurs analogues, on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & a+b\cos\nu+c\cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & a\cos\nu+b+c\cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & a\cos\mu+b\cos\lambda+c \\ a'+b'\cos\nu+c'\cos\mu & a'\cos\nu+b'+c'\cos\lambda & a'\cos\mu+b'\cos\lambda+c' & \cos V \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on multiplie la première colonne par $-a$, la deuxième par $-b$, la troisième par $-c$, et qu'on ajoute respectivement les produits obtenus aux termes correspondants de la dernière colonne, les trois premiers termes de cette colonne deviennent nuls; on a donc

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos V = aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda \\ + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu. \end{aligned} \right.$$

La condition de perpendicularité de deux droites en résulte; elle est

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda \\ + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu = 0. \end{aligned} \right.$$

3. Nous allons appliquer les formules qui précèdent à la recherche des cordes principales dans les surfaces du second ordre. On sait qu'on appelle ainsi celles qui sont perpendiculaires à la direction du plan diamétral correspondant.

Soient

$$(6)\qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

les équations d'une direction de cordes, a, b, c étant les coordonnées du point de cette droite qui est à l'unité de distance de l'origine. Un plan parallèle au plan diamétral correspondant a pour équation

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} (Aa + B''b + B'c)x + (B''a + A'b + Bc)y \\ + (B'a + Bb + A''c)z = 0, \end{aligned} \right.$$

en adoptant pour les coefficients de l'équation de la surface la notation ordinaire. Pour que la droite (6) et le plan (7) soient perpendiculaires, il faut que les coefficients de l'équation (7) soient, à un facteur près que nous désignerons par S, égaux aux cosinus des angles que la droite (6) fait avec les axes, c'est-à-dire, eu égard aux équations (2), que l'on ait

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{A}a + \mathrm{B}''b + \mathrm{B}'c = \mathrm{S}(a + b\cos\nu + c\cos\mu), \\ \mathrm{B}''a + \mathrm{A}'b + \mathrm{B}c = \mathrm{S}(a\cos\nu + b + c\cos\lambda), \\ \mathrm{B}'a + \mathrm{B}b + \mathrm{A}''c = \mathrm{S}(a\cos\mu + b\cos\lambda + c), \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire

$$(9)\quad \begin{cases} (\mathrm{A} - \mathrm{S})a + (\mathrm{B}'' - \mathrm{S}\cos\nu)b + (\mathrm{B}' - \mathrm{S}\cos\mu)c = 0, \\ (\mathrm{B}'' - \mathrm{S}\cos\nu)a + (\mathrm{A}' - \mathrm{S})b + (\mathrm{B} - \mathrm{S}\cos\lambda)c = 0, \\ (\mathrm{B}' - \mathrm{S}\cos\mu)a + (\mathrm{B} - \mathrm{S}\cos\lambda)b + (\mathrm{A}'' - \mathrm{S})c = 0. \end{cases}$$

Il faut donc choisir S tel que ces trois équations aient en a, b, c d'autres solutions que zéro. Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le déterminant des coefficients, c'est-à-dire précisément la fonction $\Delta(\mathrm{S})$ de l'article précédent, soit égal à zéro.

1° *Une racine simple de l'équation en* S *donne une direction de cordes principales et une seule.* — Car, une racine simple n'annulant pas tous les mineurs du second ordre de $\Delta(\mathrm{S})$, on pourra, de deux des équations (9) correspondant à un mineur non nul, tirer les rapports des inconnues, coefficients des termes de ce mineur, à la troisième.

2° *Une racine double de l'équation en* S *donne une infinité de directions de cordes principales parallèles à un même plan.* — Car une racine double annulant tous les mineurs du second ordre de $\Delta(\mathrm{S})$, mais n'annulant pas tous ceux du premier, les trois équations (9) se réduisent à l'une d'entre elles dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

3° *Une racine triple de l'équation en* S *donne pour les cordes principales une direction arbitraire.* — Car elle annule tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(S)$, et rend identiques les équations (9).

4° *Deux racines distinctes de l'équation en* S *donnent des directions de cordes principales rectangulaires.* — Car, si l'on désigne par S et S′ ces deux racines, on a les équations

$$\begin{aligned}
&(A - S)a + (B'' - S\cos\nu)b + (B' - S\cos\mu)c = 0,\\
&(B'' - S\cos\nu)a + (A' - S)b + (B - S\cos\lambda)c = 0,\\
&(B' - S\cos\mu)a + (B - S\cos\lambda)b + (A'' - S)c = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(A - S')a' + (B' - S\cos'\nu)b' + (B' - S'\cos\mu(c' = 0,\\
&(B'' - S'\cos\nu)a + (A' - S')b' + (B - S'\cos\lambda)c' = 0,\\
&(B' - S'\cos\mu)a' + (B - S'\cos\lambda)b' + (A'' - S')c' = 0.
\end{aligned}$$

Or, en les multipliant respectivement par a', b', c', $-a$, $-b$, $-c$ et les ajoutant, on a

$$\begin{aligned}
(S' - S)[&aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda\\
&+ (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu] = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $S' - S$ n'est pas nul,

$$\begin{aligned}
&aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda\\
&\qquad + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est la condition de perpendicularité (5).

Résumé. — Il résulte de là qu'il y a trois directions de cordes principales formant un trièdre trirectangle quand l'équation en S a ses racines distinctes, qu'il y a un plan de directions principales quand elle a une racine double, et une direction principale perpendiculaire à ce plan correspondant à la racine simple, que toute direction est principale quand l'équation en S a une racine triple.

Relations entre les directions des cordes principales et celles des plans de sections circulaires.

4. S étant une des racines de l'équation en S, nous avons vu qu'un système de plans de sections circulaires correspondant à cette racine était

$$\varphi - S\sigma = 0.$$

L'intersection de ces deux plans s'obtient en écrivant les équations du centre

$$\varphi'_x - S\sigma'_x = 0,$$
$$\varphi'_y - S\sigma'_y = 0,$$
$$\varphi'_z - S\sigma'_z = 0,$$

qui, en y remplaçant x, y, z par a, b, c, coïncident avec les équations (9). Par conséquent :

1° *Si l'équation en* S *a trois racines simples, les plans des sections circulaires sont respectivement parallèles aux cordes principales correspondant aux mêmes racines ;*

2° *Si l'équation en* S *a une racine double, les plans des sections circulaires correspondant à cette racine sont parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de la surface, qui est de révolution ; ceux qui correspondent à la racine simple sont parallèles à cet axe ;*

3° *Si l'équation en* S *a une racine triple, les plans des sections circulaires ont une direction arbitraire ; d'ailleurs la surface est une sphère.*

Réduction de l'équation générale du second degré.

5. Trois directions de cordes forment un système conjugué lorsque le plan diamétral relatif à chacune d'elles est parallèle aux deux autres.

Soient

$$(10)\qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\quad \frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'},\quad \frac{x}{a''}=\frac{y}{b''}=\frac{z}{c''}$$

trois directions de cordes ; des plans parallèles aux plans diamétraux correspondants auront pour équations

$$\begin{aligned} x\varphi'_a + y\varphi'_b + z\varphi'_c &= 0,\\ x\varphi'_{a'} + y\varphi'_{b'} + z\varphi'_{c'} &= 0,\\ x\varphi'_{a''} + y\varphi'_{b''} + z\varphi'_{c''} &= 0, \end{aligned}$$

et les conditions de parallélisme de chacun de ces plans aux deux autres cordes se réduiront à trois :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}a'a'' + \mathrm{A}'b'b'' + \mathrm{A}''c'c'' + \mathrm{B}(c'b'' + b'c'')\\ &\qquad + \mathrm{B}'(c'a'' + a'c'') + \mathrm{B}''(a'b'' + b'a'') = 0,\\ &\mathrm{A}a''a + \mathrm{A}'b''b + \mathrm{A}''c''c + \mathrm{B}(c''b + b''c)\\ &\qquad + \mathrm{B}'(c''a + a''c) + \mathrm{B}''(a''b + b''a) = 0,\\ &\mathrm{A}aa' + \mathrm{A}'bb' + \mathrm{A}''cc' + \mathrm{B}(cb' + bc')\\ &\qquad + \mathrm{B}'(ca' + ac') + \mathrm{B}''(ab' + ba') = 0. \end{aligned}\right.$$

6. Proposons-nous de rapporter la quadrique

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz\\ &\quad + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0 \end{aligned}$$

à trois axes de coordonnées formant un système conjugué quelconque. Si les équations (10) sont celles des nouveaux axes, les formules de transformation (3) nous donneront pour la nouvelle équation de la surface

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{A}'b^2 + \mathrm{A}''c^2\\ &\qquad + 2\mathrm{B}bc + 2\mathrm{B}'ca + 2\mathrm{B}''ab)x'^2\\ &+ (\mathrm{A}a'^2 + \mathrm{A}'b'^2 + \mathrm{A}''c'^2\\ &\qquad + 2\mathrm{B}b'c' + 2\mathrm{B}'c'a' + 2\mathrm{B}''a'b')y'^2\\ &+ (\mathrm{A}a''^2 + \mathrm{A}'b''^2 + \mathrm{A}''c''^2\\ &\qquad + 2\mathrm{B}b''c'' + 2\mathrm{B}'c''a'' + 2\mathrm{B}''a''b'')z'^2\\ &+ 2(\mathrm{C}a + \mathrm{C}'b + \mathrm{C}''c)x' + 2(\mathrm{C}a' + \mathrm{C}'b' + \mathrm{C}''c')y'\\ &\qquad + 2(\mathrm{C}a' + \mathrm{C}'b'' + \mathrm{C}''c'')z' + \mathrm{D} = 0, \end{aligned}\right.$$

car les coefficients des termes en yz, en zx et en xy sont précisément les doubles des premiers membres des équations (11).

7. Nous pouvons supposer, en particulier, que les équations (10) sont celles de trois cordes principales formant un trièdre trirectangle, et par suite un système conjugué. Soient S, S', S'' les racines, distinctes ou non, de l'équation en S correspondant à chacune de ces cordes, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}a + \mathrm{B}''b + \mathrm{B}'c &= \mathrm{S}(a + b\cos\nu + c\cos\mu),\\
\mathrm{B}''a + \mathrm{A}'b + \mathrm{B}c &= \mathrm{S}(a\cos\nu + b + c\cos\lambda),\\
\mathrm{B}'a + \mathrm{B}b + \mathrm{A}''c &= \mathrm{S}(a\cos\mu + b\cos\lambda + c),
\end{aligned}$$

et deux autres systèmes analogues. Multipliant ces équations respectivement par a, b, c, et ajoutant, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}a^2 + \mathrm{A}'b^2 + \mathrm{A}''c^2 + 2\mathrm{B}bc + 2\mathrm{B}'ca + 2\mathrm{B}''ab\\
&\quad = \mathrm{S}(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu + 2ab\cos\nu).
\end{aligned}$$

Mais le point (a, b, c) est à l'unité de distance de l'origine, donc

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu + 2ab\cos\nu = 1.$$

Par suite, l'équation (12) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}x'^2 + \mathrm{S}'y'^2 + \mathrm{S}''z'^2\\
&\quad + 2(\mathrm{C}a + \mathrm{C}'b + \mathrm{C}''c)x' + 2(\mathrm{C}a' + \mathrm{C}'b' + \mathrm{C}''c')y'\\
&\qquad\qquad + 2(\mathrm{C}a'' + \mathrm{C}'b'' + \mathrm{C}''c'')z' + \mathrm{D} = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on transporte l'origine au point (m, n, p), cette équation devient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{S}x^2 + \mathrm{S}'y^2 + \mathrm{S}''z^2\\
&\quad + 2(\mathrm{C}a + \mathrm{C}'b + \mathrm{C}''c + \mathrm{S}m)x\\
&\quad + 2(\mathrm{C}a' + \mathrm{C}'b' + \mathrm{C}''c' + \mathrm{S}'n)y\\
&\quad + 2(\mathrm{C}a'' + \mathrm{C}'b'' + \mathrm{C}''c'' + \mathrm{S}''p)z\\
&\quad + \mathrm{S}m^2 + \mathrm{S}'n^2 + \mathrm{S}''p^2 + 2(\mathrm{C}a + \mathrm{C}'b + \mathrm{C}''c)m\\
&\qquad\qquad + 2(\mathrm{C}a' + \mathrm{C}'b' + \mathrm{C}''c')n\\
&\qquad\qquad + 2(\mathrm{C}a'' + \mathrm{C}'b'' + \mathrm{C}''c'')p + \mathrm{D} = 0.
\end{aligned}\right.$$

1° *L'équation en* S *n'a pas de racine nulle.* — On peut alors prendre

$$m = -\frac{Ca + C'b + C''c}{S},$$

$$n = -\frac{Ca' + C'b' + C''c'}{S'},$$

$$p = -\frac{Ca'' + C'b'' + C''c''}{S''},$$

et l'équation (13) devient

$$\text{(14)} \qquad Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = H,$$

en désignant par H le terme indépendant.

2° *L'équation en* S *a une racine nulle.* — Supposons que ce soit S''. On peut encore prendre

$$m = -\frac{Ca + C'b + C''c}{S}, \quad n = -\frac{Ca' + C'b' + C''c'}{S'},$$

et l'équation (13) devient

$$\begin{aligned} Sx^2 + S'y^2 &+ 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z \\ &+ 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')p \\ &- \frac{(Ca + C'b + C''c)^2}{S} \\ &- \frac{(Ca' + C'b' + C''c')^2}{S'} + D = 0. \end{aligned}$$

Si $Ca'' + C'b'' + C''c''$ est différent de zéro, on peut déterminer p par la condition que le terme indépendant disparaisse, ce qui donne

$$\text{(15)} \qquad Sx^2 + S'y^2 + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z = 0.$$

Si $Ca'' + C'b'' + C''c'' = 0$, on a, quel que soit p,

$$\text{(16)} \qquad Sx^2 + S'y^2 = H',$$

en désignant par H' le terme indépendant.

3° *L'équation en* S *a deux racines nulles.* — Supposons que ce soient S′ et S″. On peut encore prendre

$$m = -\frac{Ca + C'b + C''c}{S},$$

et l'équation (13) devient

$$\begin{aligned} Sx^2 &+ 2(Ca' + C'b' + C''c')y + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z \\ &+ 2(Ca' + C'b' + C''c')n + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')p \\ &- \frac{(Ca + C'b + C''c)^2}{S} + D = 0. \end{aligned}$$

Si l'une des expressions

$$Ca' + C'b' + C''c', \quad Ca'' + C'b'' + C''c''$$

est différente de zéro, par exemple la première, on peut choisir arbitrairement p et déterminer n par la condition que le terme indépendant disparaisse, ce qui donne

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} Sx^2 &+ 2(Ca' + C'b' + C''c')y \\ &+ 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $Ca' + C'b' + C''c'$ et $Ca'' + C'b'' + C''c''$ sont nuls, on a, quels que soient n et p,

$$(18) \qquad Sx^2 = H'',$$

en désignant par H″ le terme indépendant.

Les équations (14), (15), (16), (17) et (18) sont les équations réduites des dix-sept espèces de quadriques. Dans le cas de l'équation (17), l'équation en S a une racine double nulle; les équations (9) se réduisent donc à l'une d'entre elles, et dès lors on peut adjoindre à cette équation l'une ou l'autre de celles-ci

$$Ca' + C'b' + C''c' = 0, \quad Ca'' + C'b'' + C''c'' = 0,$$

de manière à ne plus avoir dans l'équation (17) qu'un terme du premier degré en y ou en z.