J. BOUDÈNES

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 180-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__180_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1880;

Par M. J. BOUDÈNES, au lycée d'Avignon.

On donne un ellipsoïde, et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur ; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q.

1° *Le sommet du cône se déplaçant dans un plan donné* P, *trouver le lieu décrit par le pôle du plan* Q *par rapport à l'ellipsoïde.*

2° *Ce lieu est une surface du second degré* Σ : *on demande de déterminer les positions du plan* P *pour lesquelles le cône asymptote de cette surface* Σ *a trois* *génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.*

3° *Le plan* P *se déplaçant de façon que la surface* Σ *satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces* Σ *par un plan fixe* R *perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.*

4° *Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan* R *se déplace parallèlement à lui-même.*

1° Le plan polaire d'un point (α, β, γ), par rapport à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0.$$

Toute surface du second degré passant par l'intersection de ce plan, du plan des xy et de l'ellipsoïde, est comprise dans l'équation

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + 2\lambda z\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right) = 0,$$

et cette équation représentera un cône, si l'on a

$$f'_x = \frac{x}{a^2} + \frac{\lambda\alpha z}{a^2} = 0,$$

$$f'_y = \frac{y}{b^2} + \frac{\lambda\beta z}{b^2} = 0,$$

$$f'_z = \frac{z}{c^2} + \lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right) + \frac{\lambda\gamma z}{c^2} = 0,$$

$$f'_t = -1 - \lambda z = 0.$$

Les coordonnées (x, y, z) du sommet du cône satisfont de plus à l'équation du plan P

$$lx + my + nz = p,$$

qui, jointe aux quatre équations précédentes, nous donne, par élimination de λ, x, y, z, le lieu du pôle (α, β, γ) du plan Q.

On trouve ainsi l'équation

$$\frac{(l\alpha + m\beta + n\gamma - p)^2}{n^2 c^2} - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = 0,$$

qui représente une surface Σ du second degré circonscrite à l'ellipsoïde le long de sa courbe d'intersection avec le plan P.

2° Le cône asymptote de cette surface, étant parallèle au cône

$$\frac{(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2}{n^2 c^2} - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) = 0,$$

aura trois génératrices parallèles aux axes de l'ellipsoïde, lorsque ce dernier contiendra les trois axes de symétrie, ce qui exige que l'on ait

$$\pm \frac{l}{\frac{1}{a}} = \pm \frac{m}{\frac{1}{b}} = \pm \frac{n}{\frac{1}{c}};$$

en sorte que les plans P, dans ces cas particuliers, auront pour équations

$$\pm \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} - k = 0$$

Donc la surface Σ aura trois génératrices parallèles aux axes de l'ellipsoïde, quand le plan P sera parallèle à l'une des huit faces, parallèles deux à deux, de l'octaèdre régulier qui a pour sommets les six sommets de l'ellipsoïde.

3° Considérons l'un des huit plans

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-k=0.$$

La surface Σ correspondant à ce plan devient

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-k\right)^2-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0.$$

Un plan

$$z=\rho$$

perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde coupe cette surface suivant une conique dont le foyer aura pour projection, sur le plan xy, le foyer de la conique projection.

On sait que le foyer de la courbe projection est défini par les équations

$$\left[\frac{x}{ab}-\frac{1}{b}\left(k-\frac{\rho}{c}\right)\right]^2=\left[\frac{y}{ab}-\frac{1}{a}\left(k-\frac{\rho}{c}\right)\right]^2,$$

et

$$\frac{\rho^2}{c^2}-1-\frac{xy}{ab}+\left(k-\frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0.$$

La première se décompose en

$$x+y-\left(k-\frac{\rho}{c}\right)(a+b)=0,$$

$$x-y-\left(k-\frac{\rho}{c}\right)(a-b)=0.$$

L'élimination de k entre l'une de ces deux dernières équations et la précédente donne les cylindres

$$\text{(A)}\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=(a+b)\left(1-\frac{\rho^2}{c^2}\right),$$

$$\text{(B)}\qquad \frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b^2}=(a-b)\left(1-\frac{\rho^2}{c^2}\right),$$

et les courbes d'intersection avec le plan R, perpendiculaire à leurs génératrices, constituent le lieu cherché.

Ces équations sont indépendantes du signe de c. Par suite, chaque cylindre, en prenant pour P les quatre plans donnés par les diverses combinaisons de signes sur a et b, nous fournit quatre coniques.

Le lieu se compose donc de huit coniques.

4° Les surfaces engendrées par ces coniques, quand le plan R se déplace parallèlement à lui-même, seront représentées par les équations obtenues par l'élimination de ρ entre les équations (A) ou (B) et l'équation $z = \rho$.

Ces équations résultantes sont

$$\frac{x^2}{a(a+b)} + \frac{y^2}{b(a+b)} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a(a-b)} - \frac{y^2}{b(a-b)} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La première représente un ellipsoïde et la seconde un hyperboloïde à une nappe.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et par M. E. Henry, professeur au lycée d'Angers.