J. AUZELLE

# Concours d'admission à l'École centrale (deuxième session, 1879)

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 1 (1882), p. 176-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__176_1>

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(DEUXIÈME SESSION, 1879).

SOLUTION DE M. J. AUZELLE.
Élève du Lycée de Moulins.

---

*On donne un carré* $PQP'Q'$, *dont la demi-diagonale* $OP = OQ = n$.

1° *On demande d'écrire l'équation générale des coniques tangentes aux quatre côtés de ce carré, en distinguant les cas où ce sont des ellipses, des hyperboles ayant leurs sommets sur* $OPx$, *des hyperboles ayant leurs sommets sur* $OPy$, *ou enfin des paraboles.*

2° *On considère l'une quelconque des ellipses inscrites dans le carré; sur son demi-axe* $OA$, *comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle* $OAs$, *dont le côté* $As$ *a une longueur fixe donnée* $As = K$; *sur la direction de l'axe* $OA$, *on prend une longueur* $OS = Os$ *et on construit une hyperbole équilatère ayant son centre en* $O$ *et l'un de ses sommets en* $S$; *cette hyper-*

*bole coupe l'ellipse considérée au point* M. *On demande d'écrire l'équation lieu des points* M.

3° *On discutera la nature et la position du lieu, suivant la grandeur de la ligne donnée* K *et suivant que* OA *est le demi-grand axe ou le demi-petit axe de l'ellipse considérée.*

1° Les diagonales d'un parallélogramme circonscrit à une conique sont des diamètres conjugués; il en résulte que les droites PP' et QQ' sont des axes. Soit alors l'équation cherchée

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

En exprimant que P'Q est tangente à ces coniques et prenant $A = 1$, on obtient la relation

$$n^2 - (C+1)(n^2+F) = 0;$$

par suite l'équation demandée est

$$x^2 + Cy^2 = \frac{Cn^2}{C+1}. \tag{1}$$

On peut avoir des ellipses, des hyperboles ou même des courbes du genre parabole. Si les hyperboles ont leurs sommets sur OP$x$, leur intersection avec OQ$y$ doit donner deux valeurs imaginaires de $y$, ou deux valeurs imaginaires de $x$, si ces sommets sont sur OQ$y$. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve les résultats suivants :

$C > 0$ ellipses,

$C < 0$ hyperboles $\begin{cases} C < -1 & \text{sommets sur OP}x, \\ C > -1 & \text{» OQ}y, \end{cases}$

$C = 0$ droites doubles.

2° et 3° L'équation (1) s'écrit

$$\frac{x^2}{\dfrac{Cn^2}{C+1}} + \frac{y^2}{\dfrac{n^2}{C+1}} = 1.$$

Si nous considérons d'abord le triangle rectangle construit sur OA comme hypoténuse, l'hyperbole équilatère dont la longueur de l'axe est $\frac{Cn^2}{C+1} - K^2$ a évidemment pour équation $x^2 - y^2 = \frac{Cn^2}{C+1} - K^2$. L'élimination de C entre cette équation et l'équation de l'ellipse donnera le lieu.

On obtient facilement $C = \frac{K^2 - y^2}{y^2}$ et la substitution donne

$$K^2(x^2 - y^2 + K^2) = n^2(K^2 - y^2).$$

La nature du lieu dépend du signe de $K^2(K^2 - n^2)$.

Ce produit est toujours négatif, car, si l'on supposait $K > n$, le triangle rectangle $OAs$ serait impossible.

Le lieu est donc toujours une ellipse.

Considérons maintenant le triangle rectangle construit sur le petit axe de l'ellipse comme hypoténuse.

L'hyperbole équilatère devient

$$x^2 - y^2 = \frac{n^2}{C+1} - K^2.$$

En éliminant toujours C, on a $C+1$ et par suite C tiré de cette équation; en substituant dans l'équation de l'ellipse, il vient

$$(x^2 - y^2 + K^2)[2(n^2 - y^2) + K^2 - n^2] + n^2y^2 = 0,$$

qui est l'équation du lieu.

Posons, pour le construire, $x^2 - y^2 + K^2 = t$ :

$$y^2 = \frac{t(K^2 + n^2 - 2t)}{n^2}, \quad x^2 = \frac{t(K^2 + 2n^2 - 2t) - K^2n^2}{n^2}.$$

Le dénominateur étant une constante, il n'y a qu'à chercher entre quelles limites doit varier $t$ pour que les numérateurs soient en même temps positifs.

Le coefficient du terme en $t^2$ étant négatif dans les deux numérateurs, $t$ doit être compris entre les racines, qui sont par ordre de grandeur o, $\frac{K^2}{2}$, $\frac{K^2+n^2}{2}$, $n^2$; $t$ doit donc être compris entre $\frac{K^2}{2}$ et $\frac{K^2+n^2}{2}$.

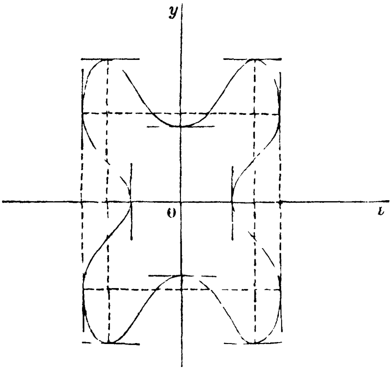
La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, il suffit de la construire dans le premier quadrant. Pour avoir le sens des variations éprouvées par $x$ et $y$, il suffit de considérer la dérivée du numérateur de $y^2$ et celle du numérateur de $x^2$; alors la discussion, qui n'offre plus de difficulté, peut être résumée dans le tableau ci-dessous.

| $t$. | $x'$. | $x$. | $y'$. | $y$. |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{K^2}{2}$ | | o | | $\frac{K\sqrt{2}}{2}$ |
| croît | $+$ | croît | $+$ | croît |
| $\frac{K^2+n^2}{4}$ | | $\sqrt{\phantom{x}}$ | o | max. $\frac{K^2+n^2}{2n\sqrt{2}}$ |
| croît | $+$ | croît | $-$ | décroît |
| $\frac{K^2+2n^2}{4}$ | o | max. $\frac{2n^2-K^2}{2n\sqrt{2}}$ | $-$ | décroît |
| croît | $-$ | décroît | $-$ | décroît |
| $\frac{K^2+n^2}{2}$ | | $\sqrt{\frac{n^2-K^2}{2}}$ | | o |

On peut remarquer que $t$ ne pouvant être infini, et par suite, ni $x$ ni $y$, il n'y a pas de branches infinies.

La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, les tangentes aux points pour lesquels on a $x=$ o ou $y=$ o sont perpendiculaires soit à O$y$ soit à O$x$; comme les maximums correspondent aussi à des tangentes parallèles aux axes, on voit que l'on a en tout douze tangentes.

En tenant compte des grandeurs relatives des valeurs




de $x$ et de $y$ qui correspondent aux points du lieu, on a une courbe dont la forme est celle indiquée ci-dessus.