NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERLOTY

Sur les équations algébriques de la forme $(x^p - a^p)\varphi(x) = 0$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 173-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__173_1>

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DE LA FORME
$(x^p - a^p)\psi(x) = 0$;

PAR LE P. BERLOTY.

THÉORÈME. — *Soit*

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

$A_0, A_1, \ldots$ *étant des constantes et m un entier. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$F(x) = 0$$

admette les p racines de l'équation

$$x^p - a^p = 0$$

est que ces p racines appartiennent à chacune des équa-

tions obtenues en annulant les p polynômes formés par la somme des termes pris dans $F(x)$, *de p en p, successivement à partir du* 1^er^, *du* 2^e^, ..., *du* $p^{\text{ième}}$, *c'est-à-dire aux équations*

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x) = A_0 x^m + A_p x^{m-p} + \ldots + A_{np} x^{m-np} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_i(x) = A_{i-1} x^{m-i+1} + \ldots + A_{np+i-1} x^{m-np-i+1} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(x) = A_{p-1} x^{m-p+1} + \ldots = 0. \end{array}\right.$$

En effet, si $F(x) = 0$ admet les racines de l'équation $x^p - a^p = 0$, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$F(x) = (x^p - a^p)\,\psi(x),$$

les p transformées en

$$\frac{x}{\alpha_1}, \quad \frac{x}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{\alpha_i}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{\alpha_p}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_p$ désignant les racines de l'équation $x^p - 1 = 0$) devront admettre ce même facteur dans leur premier membre, car le binôme $x^p - a^p$ ne change pas par cette transformation.

Réciproquement, soient

$$(2)\qquad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x) = 0$$

les p transformées; si les polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_p$ admettent $x^p - a^p$ comme facteur, il en sera de même de $F(x)$; car $x^p - a^p$ ne change pas quand on y remplace x par $\alpha_i x$, et ce changement fait dans $f_i(x)$ reproduit $F(x)$, quel que soit l'indice i de 1 à p.

Cela posé, tenant compte des relations

$$\alpha_i^p = 1, \quad \alpha_i^{p+q} = \alpha_i^q$$

et chassant les dénominateurs, on obtient, pour la transformée $f_i(x) = 0$,

$$f_i(x) = A_0 x^m + \alpha_i A_1 x^{m-1} + \alpha_i^2 A_2 x^{m-2} + \ldots + \alpha_i^{p-1} A_{p-1} x^{m-p+1} + A_p x^{m-p} + \alpha_i A_{p+1} x^{m-p-1} + \ldots = 0,$$

ou bien, en remarquant que la première colonne n'est autre que $\varphi_1(x)$, la deuxième que $\varphi_2(x)$, etc.,

$$(3) \qquad f_i = \varphi_1 + \alpha_i \varphi_2 + \alpha_i^2 \varphi_3 + \ldots + \alpha_i^{p-1} \varphi_p = 0.$$

On a donc aussi, en faisant la somme des équations semblables, multipliées respectivement par la puissance $p-j$ de la quantité α correspondante (j étant un entier pris entre 0 et $p-1$),

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \alpha_i^{p-j} f_i = \varphi_1 \Sigma \alpha_i^{p-j} + \varphi_2 \Sigma \alpha_i^{p-j+1} + \ldots \\ + \varphi_{j+1} \Sigma \alpha_i^p + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

i prenant sous les divers signes Σ toutes les valeurs entières de 1 à p.

D'ailleurs, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, on a, suivant que l'exposant μ est ou non un multiple de p,

$$\Sigma \alpha_i^\mu = p, \quad \text{ou} \quad \Sigma \alpha_i^\mu = 0.$$

Si donc on remarque que $f_i(x)$ contient les seules puissances $0, 1, 2, \ldots (p-1)$ de α_i, on voit sans peine que, dans l'équation (4), tous les termes s'évanouissent, sauf le seul terme $\varphi_{j+1} \Sigma \alpha_i^p$; d'où l'on conclut que, si toutes les équations (2) sont satisfaites par les racines de l'équation $x^p - a^p = 0$, il en sera de même de l'équation

$$\varphi_{j+1} = 0.$$

Or j est quelconque entre 0 et $p-1$; donc les p équations (1)

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p = 0$$

admettent au premier membre $x^p - a^p$ comme facteur. A leur tour, si les équations (1) sont satisfaites par les racines de l'équation $x^p - a^p = 0$, les équations (2) le seront aussi; car chacune de ces dernières, d'après la formule (3), n'est autre qu'une composition linéaire et homogène des polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Ainsi se trouve établi le théorème proposé. On peut l'énoncer dans les termes suivants :

La condition nécessaire et suffisante pour que $F(x)$ *soit de la forme* $(x^p - a^p)\psi(x)$ *est que les polynômes* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *soient de la même forme.*