Nouvelles annales de mathématiques

A. Picart

Note sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 163-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__163_1>

NOTE SUR LES PARABOLOIDES DU SECOND ORDRE OSCULATEURS AUX SURFACES;

PAR M. A. PICART.

1. L'équation d'une surface peut toujours se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} Z-z&=p(X-x)+q(Y-y)\\ &+\frac{1}{1.2}[r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2]\\ &+\frac{1}{1.2.3}[u(X-x)^3+3v(X-x)^2(Y-y)\\ &\qquad+3w(X-x)(Y-y)^2+w(Y-y)^3]+\ldots,\end{aligned}\right.$$

X, Y, Z désignant les coordonnées variables, x, y, z les coordonnées d'un point particulier de la surface, p, q, r, s, t, u, v, w, w, ... les valeurs des coefficients différentiels de divers ordres relatives à ce point.

2. Si l'on borne le développement (1) aux termes du premier degré, on a l'équation du plan tangent au point (x, y, z); si on le limite aux termes du second degré, on a l'équation d'un paraboloïde osculateur du second ordre; aux termes du troisième degré, on a un paraboloïde osculateur du troisième ordre, et ainsi de suite.

3. L'intersection de deux plans tangents infiniment voisins et la ligne qui joint leurs points de contact (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ sont les directions de deux diamètres conjugués d'une courbe du second degré située dans le plan tangent au point (x, y, z) et ayant pour projection sur le plan des xy

$$(2) \quad r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = \text{const.};$$

c'est l'*indicatrice* de Dupin.

En effet, on obtient l'équation de la projection sur le plan des xy de l'intersection des plans tangents aux deux points infiniment voisins

$$(x, y, z), \quad (x + dx, y + dy, z + dz)$$

de la surface, en différentiant l'équation du plan tangent relativement à x, y, z, savoir

$$dp(X-x) + dq(Y-y) = 0,$$

et les deux directions

$$-\frac{dp}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}$$

satisfont à la condition des directions conjuguées

$$-t\frac{dp}{dq}\frac{dy}{dx}+s\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dp}{dq}\right)+r=0,$$

qui n'est autre que l'identité

$$\frac{dp}{dq}=\frac{r\,dx+s\,dy}{s\,dx+t\,dy},$$

dans l'équation (2).

Cette équation, lorsque la constante est supposée infiniment petite, représente la projection sur le plan des xy de l'intersection de la surface par le plan tangent, transporté infiniment peu parallèlement à lui-même.

4. Si l'on considère de même les paraboloïdes osculateurs du second ordre en deux points infiniment voisins (x, y, z), $(x+dx, y+dy, z+dz)$, on reconnaît facilement qu'ils se coupent suivant deux courbes planes ayant pour projection sur le plan des xy

$$(3)\quad dr(\mathrm{X}-x)^2+2ds(\mathrm{X}-x)(\mathrm{Y}-y)+dt(\mathrm{Y}-y)^2=0,$$

et les tangentes à ces deux courbes en leur point d'intersection (x, y, z) constituent le diamètre conjugué de la ligne des contacts par rapport à une courbe du troisième degré située dans le plan tangent en (x, y, z), et ayant pour projection sur le plan des xy

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &u(\mathrm{X}-x)^3+3v(\mathrm{X}-x)^2(\mathrm{Y}-y)\\ &\qquad+3w(\mathrm{X}-x)(\mathrm{Y}-y)^2+\omega(\mathrm{Y}-y)^3=\text{const.}\end{aligned}\right.$$

Cette équation, lorsque la constante est infiniment petite, représente la projection sur le plan des xy de l'intersection de la surface par le paraboloïde osculateur transporté infiniment peu dans le sens de l'axe des z.

De plus, ces tangentes d'intersection sont toujours, quel que soit le déplacement du point de contact, deux diamètres conjugués d'une courbe du second degré située dans le plan tangent et ayant pour projection sur le plan des xy

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &(uu - v^2)(X-x)^2 + (uw - vu)(X-x)(Y-y) \\ &\qquad + (vw - u^2)(Y-y)^2 = \text{const.} \end{aligned} \right.$$

5. On pourrait étendre ces considérations aux paraboloïdes osculateurs d'ordre plus élevé et l'on arriverait à des conclusions analogues.

6. Mais ce que nous voulons étudier surtout, c'est l'enveloppe des paraboloïdes osculateurs du second ordre qui ont leurs points de contact sur une ligne donnée.

On obtient l'équation de cette enveloppe en éliminant x entre les équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &Z - z = p(X-x) + q(Y-y) \\ &\qquad + \frac{1}{1.2}\left[r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2\right], \\ &dr(X-x)^2 + 2\,ds(X-x)(Y-y) + dt(Y-y)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles z est une fonction de x et y donnée par l'équation de la surface, et y une fonction de x dépendant de la ligne que l'on considère. Quant à la caractéristique de cette enveloppe, elle est représentée par ces deux mêmes équations où l'on regarde x comme un paramètre constant. Elle se compose généralement de deux courbes planes distinctes, dont l'équation (3) représente la projection sur le plan des xy.

7. Supposons que, le long de la courbe qui dirige le mouvement de l'enveloppée, il existe entre les différen-

tielles dr, ds, dt la relation

$$(7) \qquad ds^2 = dr\,dt;$$

alors les deux branches de la caractéristique se confondent en une seule, et l'enveloppée a avec l'enveloppe, le long de cette courbe unique, un contact du second ordre.

En chaque point de la surface il y a deux directions pour lesquelles la relation (7) est satisfaite, car cette relation peut se mettre sous la forme

$$\left(v + w\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(u + v\frac{dy}{dx}\right)\left(w + w\frac{dy}{dx}\right)$$

ou

$$(8) \quad (vw - u^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (uw - vu)\frac{dy}{dy} + uu - v^2 = 0.$$

On voit que ce sont les directions asymptotiques de la courbe (5), comme on devait s'y attendre. Il existe donc sur la surface un double système de lignes (réelles ou imaginaires) le long desquelles l'enveloppe des paraboloïdes osculateurs a un contact du second ordre avec ses enveloppées. L'enveloppe est alors définie par les deux équations

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y) \\ &\quad + \frac{1}{1.2}[r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \\ &\left(u + v\frac{dy}{dx}\right)(X - x) + \left(v + w\frac{dy}{dx}\right)(Y - y) = 0, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut ajouter la condition (8).

8. Remarquons maintenant, et c'est là l'objet principal de cette Note, que les coefficients différentiels du second ordre R, S, T relatifs à l'enveloppe, étant les

mêmes, le long de chaque caractéristique, que les coefficients r, s, t relatifs à l'enveloppée correspondante, restent constants le long d'une même caractéristique, et que, par suite, les rapports des variations $d\mathrm{R}$, $d\mathrm{S}$, $d\mathrm{T}$ que subissent ces coefficients pour un déplacement infiniment petit effectué sur l'enveloppe, à partir d'un point, sont indépendants de la direction de ce déplacement. Or on a

$$\begin{aligned} d\mathrm{R} &= \mathrm{U}d\mathrm{X} + \mathrm{V}\,d\mathrm{Y}, \\ d\mathrm{S} &= \mathrm{V}d\mathrm{X} + \mathfrak{W}\,d\mathrm{Y}, \\ d\mathrm{T} &= \mathfrak{W}\,d\mathrm{X} + \mathrm{W}dy; \end{aligned}$$

donc, sur toute l'étendue de l'enveloppe, les rapports

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}, \frac{\mathrm{V}}{\mathfrak{W}}, \frac{\mathfrak{W}}{\mathrm{W}}$$

doivent être égaux, c'est-à-dire que l'équation finie de l'enveloppe vérifie les équations aux dérivées partielles du troisième ordre

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathfrak{W}} = \frac{\mathfrak{W}}{\mathrm{W}}$$

ou

$$\mathrm{V}^2 = \mathrm{U}\mathfrak{W}^2, \quad \mathfrak{W}^2 = \mathrm{V}\mathrm{W}, \quad \mathrm{U}\mathrm{W} = \mathrm{V}\mathfrak{W},$$

dont la dernière est une conséquence des deux premières.

Nous avons donc ainsi une intégrale commune aux deux équations

$$(10) \qquad \mathrm{V}^2 = \mathrm{U}\mathfrak{W}, \quad \mathfrak{W}^2 = \mathrm{V}\mathrm{W}.$$

Si l'on regarde z comme une fonction arbitraire F de x et y, et y comme une fonction f de x ayant pour dérivée y', et qu'on donne à p, q, r, s, t, u, v, $\mathfrak{w}$, w leur signification bien connue, cette intégrale commune provient de l'élimination de x entre les équations

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y) \\ &\qquad + \frac{1}{1.2}\left[r(\mathrm{X} - x)^2 + 2s(\mathrm{X} - x)(\mathrm{Y} - y) + t(\mathrm{Y} - y)^2\right], \\ &(u + vy')(\mathrm{X} - x) + (v + \mathfrak{w}y')(\mathrm{Y} - y) = 0. \end{aligned} \right.$$

avec la condition

$$(vw - u^2)y'^2 + (uw - vu)y' + uu - v^2 = 0,$$

ou, en tirant de la seconde de ces équations la valeur de y' pour la porter dans la troisième, de l'élimination de x entre les deux équations

$$(11')\quad \begin{cases} Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{1.2}\left[r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2\right], \\ (uu - v^2)(X - x)^2 + (uw - vu)(X - x)(Y - y) \\ \qquad\qquad + (vw - u^2)(Y - y)^2 = 0. \end{cases}$$

9. De là le mode de génération suivant des surfaces définies par les équations (10) :

Si l'on prend une surface quelconque

$$z = F(x, y)$$

et qu'on détermine sur cette surface le double système de lignes

$$y = f(x)$$

défini par l'équation différentielle

$$ds^2 = dr\, dt,$$

les enveloppes des paraboloïdes osculateurs du second ordre menés le long de ces différentes lignes sont autant de surfaces satisfaisant aux deux équations

$$V^2 = U\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}U^2 = VW.$$

10. Il est du reste facile d'obtenir l'intégrale générale de l'une de ces équations, par exemple $V^2 = U\mathfrak{U}$.

On voit sans peine que l'intégrale première est

$$(12)\qquad r = \varphi(s).$$

φ désignant une fonction arbitraire, et que cette dernière équation a pour intégrale

$$(13) \qquad p = \psi(\alpha) + x\varphi(\alpha) + \alpha y,$$

ψ étant la caractéristique d'une nouvelle fonction arbitraire, et α une fonction de x et y définie par l'équation

$$(14) \qquad \psi'(\alpha) + x\varphi'(\alpha) + y = 0.$$

Il reste donc à intégrer le système des équations (13) et (14).

L'équation (13) donne

$$z = \int (\psi + x\varphi + \alpha y)\, dx + \theta(y)$$

ou, en intégrant par parties,

$$(15) \qquad z = x(\psi + x\varphi + \alpha y) - \int x\varphi\, dx + \theta(y),$$

θ désignant une troisième fonction arbitraire.

Il faut remarquer que l'intégrale est prise par rapport à x, y étant traité comme une constante.

Substituons à x la variable α. L'équation (14) nous fournit la valeur de x en fonction de α, savoir

$$x = -\frac{y + \psi'}{\varphi'},$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{(y + \psi')\varphi'' - \varphi'\psi''}{\varphi'^2}\, d\alpha.$$

Portant ces valeurs de x et dx dans (15) sous le signe $\int$, on obtient

$$z = x(\psi + x\varphi + \alpha y)$$
$$+ \int \frac{(y + \psi')[(y + \psi')\varphi'' - \varphi'\psi'']}{\varphi'^3}\varphi\, d\alpha + \theta(y)$$

ou

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} z = {} & x(\psi + x\varphi + \alpha y) \\ & + y^2 \int \frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^3}\,d\alpha + y \int \frac{2\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{\varphi'^3}\,\varphi\,d\alpha \\ & + \int \frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')}{\varphi'^3}\,\varphi\,d\alpha + \theta(y). \end{aligned}\right.$$

Cette équation, jointe à la relation (14), constitue l'intégrale générale de l'équation du troisième ordre

$$V^2 = ULU$$

ou de l'équation du second ordre équivalente

$$r = \varphi(s).$$

On formerait de même l'intégrale de l'équation

$$LU^2 = VW \quad \text{ou} \quad t = \varphi(s).$$

Remarquons que, lorsque $\theta(y)$ est une fonction du second degré en y, la surface représentée par les équations (14) et (16) peut être regardée comme engendrée par le déplacement d'une courbe du second ordre.