NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. BARBARIN

Note sur les coordonnées bipolaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 15-28

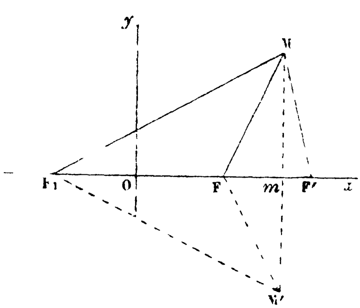
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__15_1>

NOTE SUR LES COORDONNÉES BIPOLAIRES;

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

I. Dans le système des coordonnées bipolaires, un point M est déterminé par ses distances $FM = \rho$, $F_1M = \rho_1$, à deux points fixes F, F_1 appelés *foyers* ou

Fig. 1.



pôles. Si le point M est assujetti à décrire une certaine courbe, il y a entre ses coordonnées bipolaires ρ, ρ_1 une relation

$$F(\rho, \rho_1) = 0$$

qui est l'équation bipolaire de cette courbe. Réciproquement, toute équation de cette forme représente une courbe.

On peut construire géométriquement le point M en décrivant deux circonférences, l'une du point F pour centre avec ρ pour rayon, l'autre du point F_1 pour centre avec ρ_1 pour rayon. M sera un point commun à ces deux circonférences. Mais il faut remarquer que ces deux courbes ont un second point commun M' symétrique du premier par rapport à la droite FF_1. Donc toute courbe dont l'équation a la forme

$$F(\rho, \rho_1) = 0$$

est symétrique par rapport à la droite FF_1, que nous appellerons pour cela *axe polaire* ou *focal*.

Soit O le milieu de FF_1; considérons deux axes rectangulaires : Ox dirigé suivant OF et Oy; soient x, y les coordonnées cartésiennes du point M par rapport à ces deux axes; on a, en posant $OF = c$, $OF_1 = -c$,

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho^2 = (x-c)^2 + y^2, \\ \rho_1^2 = (x+c)^2 + y^2, \end{cases}$$

système d'équations déterminant ρ et ρ_1 en fonction de x et y. Ces formules servent à transformer l'équation bipolaire

$$F(\rho, \rho_1) = 0$$

en l'équation cartésienne

$$F\left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right] = 0.$$

Il est facile d'en déduire des équations permettant d'opérer la transformation inverse, car les équations (1) soustraites l'une de l'autre, membre à membre, donnent

$$x = \frac{\rho_1^2 - \rho^2}{4c},$$

d'où

$$(2) \qquad \begin{cases} y^2 = \rho^2 - \dfrac{(\rho_1^2 - \rho^2 - 4c^2)^2}{16c^2} = \dfrac{16c^2\rho^2 - (\rho_1^2 - \rho^2 - 4c^2)^2}{16c^2}, \\ y^2 = \dfrac{(\rho + \rho_1 + 2c)(\rho - \rho_1 + 2c)(\rho_1 + \rho - 2c)(\rho_1 - \rho + 2c)}{16c^2}. \end{cases}$$

Il est facile de trouver, en fonction de ρ et ρ_1, la distance ρ' d'un point M à un autre point F' de l'axe polaire. Soit, en effet, $OF' = c'$ et soit m la projection de M sur l'axe; on a successivement

$$\rho^2 = (c' - c)^2 + \rho'^2 - 2(c' - c)\overline{mF'},$$
$$\rho_1^2 = (c' + c)^2 + \rho'^2 - 2(c' + c)\overline{mF'};$$

éliminons $\overline{mF'}$ entre les deux équations et nous aurons

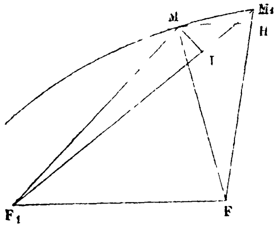
$$\begin{aligned}(c' + c)\rho^2 - (c' - c)\rho_1^2 = 2c\rho'^2 &+ (c' - c)^2(c' + c)\\ &- (c' - c)^2\ (c' + c),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad 2c\rho'^2 = (c' + c)\rho^2 - (c' - c)\rho_1^2 + 2c(c'^2 - c^2).$$

II. *Tangente à la courbe.* — Soient M, M_1 deux points voisins, (ρ, ρ_1), $(\rho + \Delta\rho, \rho_1 + \Delta\rho_1)$ leurs coordonnées : nous supposerons, pour fixer les idées, $\Delta\rho$ et $\Delta\rho_1 > 0$.

Fig. 2.



Décrivons du point F comme centre l'arc MH, et du point F_1 comme centre l'arc MI; nous aurons

$$M_1H = \Delta\rho, \quad IM_1 = \Delta\rho_1.$$

Or, dans les triangles MHM_1 et MIM_1,

$$\frac{\Delta\rho}{MM_1} = \frac{\sin\widehat{HMM_1}}{\sin\widehat{MHM_1}},\quad \frac{\Delta\rho_1}{MM_1} = \frac{\sin\widehat{IMM_1}}{\sin\widehat{MIM_1}};$$

donc, en divisant,

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \frac{\sin\widehat{HMM_1}}{\sin\widehat{IMM_1}}\,\frac{\sin\widehat{MIM_1}}{\sin\widehat{MHM_1}}.$$

Lorsque le point M_1 tend à se rapprocher du point M la corde MM_1 devient tangente en ce dernier point, les angles MIM_1 et MHM_1 sont droits, et si l'on désigne par V et V_1 les angles que fait la tangente dirigée vers M_1 avec les rayons FM et F_1M prolongés, on a

$$\lim\widehat{HMM_1} = \frac{\pi}{2} - V, \quad \lim\widehat{IMM_1} = \frac{\pi}{2} - V_1;$$

donc

$$(4) \qquad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\cos V}{\cos V_1}:$$

cette formule détermine la position de la tangente.

Théorème. — *Les projections d'un segment quelconque de la tangente sur les rayons vecteurs sont dans le même rapport que les différentielles des rayons vecteurs du point de contact.*

Car les projections du segment h sont $h\cos V$, $h\cos V_1$, et l'on a

$$\frac{h\cos V}{h\cos V_1} = \frac{d\rho}{d\rho_1}.$$

Si l'on désigne par U, U_1 les angles que fait la normale avec les rayons vecteurs, on a

$$U = \frac{\pi}{2} - V, \quad U_1 = \frac{\pi}{2} - V_1;$$

donc

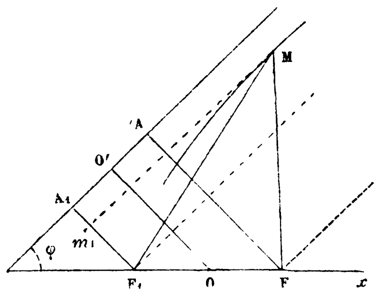
$$(4') \qquad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\sin U}{\sin U_1}.$$

Les formules (4) et (4′) établies au cas où $\Delta\rho$ et $\Delta\rho_1$

sont > 0 sont vraies dans tous les cas, comme on pourrait le démontrer par une analyse directe.

III. *Asymptote.* — Soit M un point qui s'éloigne

Fig. 3.



indéfiniment sur une branche de courbe; dans le triangle MF_1F, nous avons

$$\rho^2 = 4c^2 + \rho_1^2 - 4c\rho_1 \cos \widehat{MF_1F},$$

d'où

$$\cos \widehat{MF_1F} = \frac{\rho_1^2 - \rho^2 + 4c^2}{4c\rho_1}.$$

Lorsque le point M s'éloigne indéfiniment, ρ et ρ_1 tendent simultanément vers ∞, mais les rayons FM, F_1M tendent vers des positions limites qui sont parallèles à la direction asymptotique. On a donc alors

$$(5) \qquad \cos\varphi = \lim \cos \widehat{MF_1F} = \lim \frac{\rho_1^2 - \rho^2 + 4c^2}{4c\rho_1};$$

φ est l'inclinaison de la direction asymptotique de l'axe polaire.

Réciproquement, si $\dfrac{\rho_1^2 - \rho^2 + 4c^2}{4c\rho_1}$ a une limite finie comprise entre -1 et $+1$, lorsque ρ_1 et ρ tendent à la fois vers ∞, cette limite peut être considérée comme le cosinus d'un angle φ qui est l'inclinaison de la direction asymptotique sur l'axe polaire.

Pour déterminer la position de l'asymptote, abaissons du point F_1 une perpendiculaire F_1A_1 sur cette asymptote, et du point M la perpendiculaire Mm_1 sur F_1A_1, nous avons

$$\lim m_1 F_1 = A_1 F_1;$$

or

$$\begin{aligned} F_1 m_1 &= \rho_1 \sin F_1 M m_1 = \rho_1 \sin(MF_1F - \varphi) \\ &= \rho_1(\sin MF_1F \cos\varphi - \cos MF_1F \sin\varphi), \end{aligned}$$

d'où

$$(6) \quad A_1F_1 = \lim \rho_1(\sin MF_1F \cos\varphi - \cos MF_1F \sin\varphi);$$

de même on pourra prendre, pour déterminer la position de l'asymptote,

$$AF = \lim \rho \sin(MFx - \varphi),$$

et aussi

$$\begin{aligned} OO' &= \tfrac{1}{2}(AF + A_1F_1) \\ &= \tfrac{1}{2}\lim \rho \sin)MFx - \varphi) + \tfrac{1}{2}\lim \rho_1 \sin(MF_1F - \varphi). \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'une de ces trois limites existe quand ρ et ρ_1 tendent simultanément vers ∞, elle déterminera la position de l'asymptote.

IV. *Cas particuliers.* — Je vais appliquer les considérations précédentes à l'étude de quelques courbes.

1° J'étudierai d'abord les courbes représentées par l'équation

$$\rho + m\rho_1 = 2a,$$

dans laquelle a est une longueur et m un paramètre positif ou négatif. Ce sont les *ovales de Descartes*. En différentiant l'équation, on trouve

$$d\rho + m\, d\rho_1 = 0.$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\cos V}{\cos V_1} = -\frac{1}{m}.$$

Dans les ovales cartésiens, le rapport des projections d'un segment de la tangente sur les rayons vecteurs est constant, et cette propriété est caractéristique de ces courbes.

On a encore

$$\begin{aligned}\cos MF_1F &= \frac{\rho_1^2 - (2a - m\rho_1)^2 + 4c^2}{4c\rho_1} \\ &= \frac{(1-m^2)\rho_1^2 + 4am\rho_1 + 4(c^2 - a^2)}{4c\rho_1}.\end{aligned}$$

Si $m^2 \gtrless 1$, ce que nous supposerons tout d'abord, $\cos MF_1F$ n'a pas de limite : donc les ovales n'ont pas d'asymptote.

Les ovales coupent l'axe Oy au point pour lequel

$$\rho = \rho_1 = \frac{2a}{m+1},$$

et l'axe polaire aux points

$$\left\{\begin{aligned}\rho &= \frac{2(a-c)}{m+1}, \\ \rho_1 &= \frac{2(a+c)}{m+1},\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\rho &= \frac{2(a+c)}{m+1}, \\ \rho_1 &= \frac{2(a-c)}{m+1}.\end{aligned}\right.$$

La distance ρ' d'un point de la courbe à un point F' de l'axe polaire est déterminée par la formule (3)

$$2c\rho'^2 = (c'+c)\rho^2 - (c'-c)\rho_1^2 + 2c(c'^2 - c^2),$$

c'est-à-dire, en éliminant ρ,

$$\begin{aligned}2c\rho'^2 &= (c'+c)(2a - m\rho_1)^2 - (c'-c)\rho_1^2 + 2(c'^2 - c^2)c, \\ 2c\rho'^2 &= [(c'+c)m^2 - (c'-c)]\rho_1^2 - 4am(c'+c)\rho_1 \\ &\qquad + 4a^2(c'+c) + 2c(c'^2 - c^2) = 0.\end{aligned}$$

Le second membre est une fonction du second degré de ρ_1 : on peut chercher à rendre ce polynôme carré parfait; il suffit, pour cela, qu'on prenne

$$4a^2m^2(c'+c)^2 - [4a^2(c'+c) - 2c(c'^2-c^2)] \times [m^2(c'+c) - (c'-c)] = 0,$$

ou

$$(c'^2-c^2)[4a^2 + 2c(c'-c) - 2c(c'+c)m^2] = 0.$$

$c'^2 - c^2 = 0$ donne comme solutions singulières

$$c' = c,$$
$$c' = -c,$$

c'est-à-dire les deux foyers déjà existants; le second facteur donne

$$c' = \frac{c^2(1+m^2) - 2a^2}{(1-m^2)c};$$

cette condition remplie, l'équation en ρ_1 et ρ' devient alors

$$2c\rho'^2 = \frac{2a^2}{c}\rho_1^2 - 8am\frac{c^2-a^2}{(1-m^2)c}\rho_1 + \frac{8(c^2-a^2)^2m^2}{(1-m^2)^2c},$$

ou

$$c^2\rho'^2 = \left[a\rho_1 - \frac{2(c^2-a^2)m}{1-m^2}\right]^2,$$

ou enfin

$$a\rho_1 \pm c\rho' = \frac{2m(c^2-a^2)}{1-m^2}.$$

THÉORÈME. — *Le point F' déterminé par*

$$c' = \frac{c^2(1+m^2) - 2a^2}{(1-m^2)c}$$

est un troisième foyer pouvant s'associer à l'un de ceux qui existent déjà.

THÉORÈME. — *Les ovales cartésiens sont le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux cercles fixes est constant.*

En effet, posons

$$2a = mR_1 - R,$$

nous aurons

$$\rho + m\rho_1 = mR_1 - R,$$

ou bien

$$\frac{\rho + R}{R_1 - \rho_1} = m.$$

En particulier, considérons les points tels que le rapport de leurs distances aux deux foyers est constant. Tous ces points sont sur l'ovale cartésien

$$\rho = m\rho_1, \quad (a = 0).$$

Cet ovale, comme nous l'avons démontré plus haut, a un troisième foyer F′ déterminé par

$$c' = \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \cdot c,$$

et si l'on associe ce foyer à F_1, l'équation de l'ovale devient

$$c\rho' = \frac{2m(c^2 - a^2)}{(1 - m^2)}.$$

Cet ovale est donc un cercle dont F′ est le centre, résultat déjà connu géométriquement.

2° J'ai tout d'abord écarté le cas où $m^2 = 1$. Je reviens maintenant à cette hypothèse pour étudier successivement les deux courbes

$$\rho + \rho_1 = 2a,$$
$$\rho - \rho_1 = 2a.$$

La première courbe est une ellipse que son équation définit tout entière. La tangente est déterminée par la relation

$$\frac{\cos V}{\cos V_1} = -1:$$

elle fait donc des angles égaux avec les rayons vecteurs, et réciproquement. Il n'y a pas d'asymptote, car

$$\cos \mathrm{MF_1F} = \frac{(\rho_1 - \rho)2a + 4c^2}{4c\rho_1} = \frac{(\rho_1 - a)a + c^2}{c\rho_1},$$

$\lim \cos \mathrm{MF_1F} = \frac{a}{c}$, mais $a > c$: donc l'angle limite φ n'existe pas. Le grand axe de la courbe est $2a$, le petit axe $2\sqrt{a^2 - c^2} = 2b$.

La deuxième courbe est une branche d'hyperbole entourant le foyer $\mathrm{F_1}$; pour avoir l'autre branche, il faut associer à l'équation

$$\rho - \rho_1 = 2a$$

l'équation

$$\rho_1 - \rho = 2a,$$

de sorte que la courbe entière serait représentée par l'équation unique

$$(\rho - \rho_1)^2 - 4a^2 = 0.$$

La tangente est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, car

$$\frac{\cos \mathrm{V}}{\cos \mathrm{V_1}} = 1.$$

On a

$$\cos \widehat{\mathrm{MF_1F}} = \frac{(\rho_1 + \rho)2a + 4c^2}{4c\rho_1} = \frac{a(\rho_1 - a) + c^2}{c\rho_1},$$

$\lim \cos \mathrm{MF_1F} = \frac{a}{c}$, a étant $< c$: il y a donc une direction asymptotique déterminée par $\cos \varphi = \frac{a}{c}$. Pour trouver la position de l'asymptote, posons

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

nous avons alors

$$\cos \widehat{\mathrm{MF_1F}} = \frac{a\rho_1 + b^2}{c\rho_1}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{c},$$

$$\sin \widehat{\mathrm{MF_1F}} = \frac{1}{c\rho_1}\sqrt{c^2\rho_1^2 - (a\rho_1 + b^2)^2}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{c},$$

donc

$$F_1 m_1 = \frac{b}{c}\left[a\sqrt{\rho_1^2 - 2a\rho_1 - b^2} - (a\rho_1 + b^2)\right];$$

en multipliant et divisant par la quantité conjuguée, on trouve facilement

$$F_1 m_1 = -\frac{b}{c}\,\frac{2a\rho_1(a^2+b^2) + b^2(a^2+b^2)}{a\sqrt{\rho_1^2 - 2a\rho_1 - b^2} + a\rho_1 + b^2},$$

d'où, en passant à la limite,

$$F_1 A_1 = \lim F_1 m_1 = -b = -c\sin\varphi.$$

L'asymptote passe par le point O, centre de la courbe. Il y en aura une seconde symétrique par rapport à l'axe polaire.

3° Tout cercle ayant son centre sur l'axe polaire peut être représenté par une équation de la forme

$$a\rho^2 + b\rho_1^2 = r^2,$$

a, b étant des nombres positifs ou négatifs. En effet, si l'on calcule, d'après la formule (3), la distance d'un point de cette courbe à un point fixe F' de l'axe polaire, on trouve

$$\begin{aligned} 2c\rho'^2 &= (c'+c)\rho^2 - (c'-c)\,\frac{r^2 - a\rho^2}{b} + 2c(c'^2 - c^2) \\ &= \left[c' + c + \frac{a}{b}(c'-c)\right]\rho^2 + 2c(c'^2 - c^2) - (c'-c)\frac{r^2}{b}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit c' de façon que le coefficient de ρ^2 soit nul,

$$c' = c\,\frac{(a-b)}{a+b},$$

il vient

$$\rho'^2 = \frac{1}{(a+b)^2}\left[b(a+b)r^2 - 4c^2ab\right],$$

équation d'un cercle dont F' est le centre, et le rayon a pour valeur $\sqrt{\frac{b(a+b)r^2-4c^2ab}{a+b}}$; en particulier, pour $a=b$, on a

$$c'=0,$$

$$\rho'^2=\frac{r^2-2ac^2}{2a}=\frac{\rho^2+\rho_1^2-2c^2}{2}.$$

Le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes est constante est donc un cercle ayant pour centre le milieu de la distance des points fixes.

4° On appelle *ovale de Cassini* le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes est constant.

L'équation polaire de cette courbe est donc

$$\rho\rho_1=a^2;$$

les points où elle coupe l'axe polaire sont donnés par

$$\rho=\rho_1=\pm a;$$

il y a donc trois cas à distinguer :

$a<c$: la courbe ne coupe pas l'axe Oy et se compose de deux ovales séparés entourant chacun un foyer ;

$a=c$: la courbe coupe l'axe polaire au point O et porte alors le nom de *lemniscate ;*

$a>c$: les deux ovales se sont confondus en un seul qui entoure les deux foyers.

Si on différentie l'équation de la courbe, on trouve

$$\rho_1 d\rho+\rho d\rho_1=0,$$

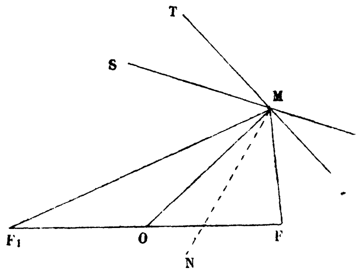
donc

$$\frac{d\rho}{d\rho_1}=\frac{\cos V}{\cos V_1}=-\frac{\rho}{\rho_1}.$$

De cette formule ressort une construction simple de la tangente en un point M de la courbe : il suffit, en effet.

de mener MT perpendiculaire à OM et de prendre la sy-

Fig. 4.



métrique MS de MT par rapport à la bissectrice MN de l'angle FMF_1.

Les points où la tangente est parallèle à l'axe polaire sont ceux où l'on a aussi

$$\rho \sin V = \rho_1 \sin V_1 :$$

donc, en ces points,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\sin V_1}{\sin V} = -\frac{\cos V}{\cos V_1};$$

de là résulte

$$\cos V \sin V + \cos V_1 \sin V_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$V = V_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Le lieu de ces points est donc la circonférence qui a O pour centre et $OF = OF_1 = c$ pour rayon.

5° Le système des coordonnées bipolaires est quelquefois utile pour faire apercevoir des propriétés de certaines courbes définies par rayons vecteurs, et simplifier dans certains cas la recherche de leur équation cartésienne.

Ainsi les courbes définies par l'équation

$$\frac{1}{a^2\rho^2} + \frac{1}{b^2\rho_1^2} = \frac{1}{K^4}$$

ne sont autre chose que les courbes

$$a^2 b^2 \rho^2 \rho_1^2 - a^2 \rho^2 K^4 - b^2 \rho_1^2 K^4 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a^2\rho^2 - K^4)(b^2\rho_1^2 - K^4) = K^8,$$

ou enfin

$$\left(\rho^2 - \frac{K^4}{a^2}\right)\left(\rho_1^2 - \frac{K^4}{b^2}\right) = \frac{K^8}{a^2 b^2}.$$

Ces courbes sont donc le lieu géométrique des points tels que le produit de leurs puissances par rapport à deux cercles ayant respectivement F et F_1 pour centres et $\frac{K^2}{a}$, $\frac{K^2}{b}$ pour rayons, soit constant. Ce lieu est le même que celui des points tels que le produit des tangentes qui en sont menées aux deux cercles soit aussi constant.

Lorsque $a = b$, l'équation de ces courbes devient, en posant $\frac{K^2}{a} = h$,

$$(\rho^2 - h^2)(\rho_1^2 - h^2) = h^4,$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Le lieu des points tels que le produit des tangentes qui en sont menées à deux cercles égaux est égal au carré du rayon de ces cercles jouit donc de la propriété suivante :

La somme des carrés des inverses des rayons vecteurs est constante.