Nouvelles annales de mathématiques

A. Legoux

Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 145-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__145_0>

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL ATTIRÉ OU REPOUSSÉ PAR UN NOMBRE QUELCONQUE DE POINTS MATÉRIELS FIXES PROPORTIONNELLEMENT AUX MASSES ET A UNE PUISSANCE DE LA DISTANCE;

PAR M. A. LEGOUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Dans ce qui va suivre, nous traiterons seulement le cas de l'attraction. Celui de la répulsion se traiterait de la même manière; il suffirait de changer les signes des masses des points fixes.

Désignons par $m_1, m_2, m_3, \ldots$ les masses des points attirants $A_1, A_2, A_3, \ldots$; par $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ les coordonnées de ces points; par x, y, z celles du point attiré M; par $u_1, u_2, u_3, \ldots$ les distances respectives du point M aux points $A_1, A_2, \ldots$, et supposons que l'attraction du point A_1 soit représentée par $\frac{m_1}{u_1^{n+1}}$, celle de A_2 par $\frac{m_2}{u_2^{n+1}}, \ldots$.

Si X, Y, Z désignent les composantes de l'attraction totale suivant trois axes rectangulaires quelconques, on a

$$X = \sum \frac{m_1(x_1 - x)}{u_1^{n+2}},$$

$$Y = \sum \frac{m_1(y_1 - y)}{u_1^{n+2}},$$

$$Z = \sum \frac{m_1(z_1 - z)}{u_1^{n+2}},$$

$$u_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2, \quad \ldots;$$

dans la position d'équilibre, on aura

$$\sum \frac{m_1(x_1 - x)}{u_1^{n+2}} = 0,$$

$$\sum \frac{m_1(y_1 - y)}{u_1^{n+2}} = 0,$$

$$\sum \frac{m_1(z_1 - z)}{u_1^{n+2}} = 0.$$

On peut prendre pour origine des coordonnées la position d'équilibre du point M, et si l'on désigne par d_1, d_2, ... ce que deviennent alors les $u_1, u_2, \ldots$, on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{m_1 x_1}{d_1^{n+2}} = 0, \\ &\sum \frac{m_1 y_1}{d_1^{n+2}} = 0, \\ &\sum \frac{m_1 z_1}{d_1^{n+2}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ceci posé, appelons φ la fonction des forces définie par l'équation

$$d\varphi = \sum \frac{m_1[(x_1 - x)dx + (y_1 - y)dy + (z_1 - z)dz]}{u_1^{n+2}}$$

$$= -\sum \frac{m_1 du_1}{u_1^{n+1}},$$

d'où

$$(2) \qquad \varphi = \sum \frac{1}{n} \frac{m_1}{u_1^n}.$$

Dans la position d'équilibre, on sait que $\varphi =$ constante.

Stabilité ou instabilité de l'équilibre du point matériel. — On écartera très peu le point M de sa position d'équilibre, c'est-à-dire de l'origine des coordonnées. On considérera les coordonnées du point comme des quantités très petites et l'on négligera dans le développement les secondes puissances de ces quantités.

Les équations du mouvement seront, dans le cas général,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\varphi}{dx},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d\varphi}{dy},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d\varphi}{dz}.$$

Développons le second membre d'après la série de Taylor, et remarquons que, pour $x=y=z=0$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont nuls; on aura

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 x+\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 y+\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right)_0 z,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{d^2\varphi}{dy\,dx}\right)_0 x+\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 y+\left(\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right)_0 z,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}\right)_0 x+\left(\frac{d^2\varphi}{dz\,dy}\right)_0 y+\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_0 z.$$

D'ailleurs, on trouve pour les dérivées secondes de φ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\sum\left[-\frac{m_1}{u_1^{n+2}}+\frac{(n+2)m_1(x_1-x)^2}{u_1^{n+4}}\right],$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\sum\left[-\frac{m_1}{u_1^{n+2}}+\frac{(n+2)m_1(y_1-y)^2}{u_1^{n+4}}\right],$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\sum\left[-\frac{m_1}{u_1^{n+2}}+\frac{(n+2)m_1(z_1-z)^2}{u_1^{n+4}}\right],$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}=(n+2)\sum\frac{m_1(x_1-x)(y_1-y)}{u_1^{n+4}},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}=(n+2)\sum\frac{m_1(y_1-y)(z_1-z)}{u_1^{n+4}},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}=(n+2)\sum\frac{m_1(z_1-z)(x_1-x)}{u_1^{n+4}}.$$

On remarque d'abord que

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=(n-1)\sum\frac{m_1}{u_1^{n+2}}.$$

En particulier, si $n=1$ et si aucun des u_1 n'est égal à o, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0:$$

c'est le théorème de Laplace dans le cas de l'attraction newtonienne.

Pour simplifier l'écriture, nous représenterons par a, b, c, f, g, h les valeurs des dérivées secondes de φ lorsque $x=0$, $y=0$, $z=0$,

$$\begin{aligned}
a&=(n+2)\sum\frac{m_1x_1^2}{d_1^{n+4}}-\sum\frac{m_1}{d_1^{n+2}}, & f&=(n+2)\sum\frac{m_1y_1z_1}{d_1^{n+4}},\\
b&=(n+2)\sum\frac{m_1y_1^2}{d_1^{n+4}}-\sum\frac{m_1}{d_1^{n+2}}, & g&=(n+2)\sum\frac{m_1z_1x_1}{d_1^{n+4}},\\
c&=(n+2)\sum\frac{m_1z_1^2}{d_1^{n+4}}-\sum\frac{m_1}{d_1^{n+2}}, & h&=(n+2)\sum\frac{m_1x_1y_1}{d_1^{n+4}}.
\end{aligned}$$

D'après cela, les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2}&=ax+hy+gz,\\
m\frac{d^2y}{dt^2}&=hx+by+fz,\\
m\frac{d^2z}{dt^2}&=gx+fy+cz.
\end{aligned}\right.$$

On intègre sans peine ces équations linéaires simultanées en posant $x=Ae^{rt}$, $y=Be^{rt}$, $z=Ce^{rt}$; on a trois équations linéaires et homogènes en A, B, C; ces trois équations déterminent les trois quantités $\frac{C}{A}$, $\frac{B}{A}$, r.

L'équation qui donne r est la suivante

$$\begin{vmatrix} mr^2 - a & -h & -g \\ -h & mr^2 - b & -f \\ -g & -f & mr^2 - c \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(4) \quad \begin{cases} (mr^2)^3 - (a+b+c)(mr^2)^2 \\ \quad + (ab + bc + ca - f^2 - g^2 - h^2) mr^2 \\ \qquad - abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh = 0. \end{cases}$$

On sait que cette équation, qui a une forme identique avec celle qui se présente en Géométrie analytique dans la recherche des plans principaux des surfaces du second ordre, a toutes ses racines réelles. Or, pour que l'équilibre soit stable, il faut que x, y, z s'expriment par des sinus et des cosinus, c'est-à-dire que l'équation précédente ne fournisse que des valeurs imaginaires pour r; il faut donc que l'équation du troisième degré en mr^2 ait toutes ses racines négatives et inégales. D'après le théorème de Descartes, il faut et il suffit que cette équation n'ait que des permanences.

Donc les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre sont exprimées par les inégalités suivantes :

$$(5) \qquad a + b + c < 0,$$

$$(6) \qquad ab + ac + bc - f^2 - g^2 - h^2 > 0,$$

$$(7) \qquad - abc - 2fgh + af^2 + bg^2 + ch^2 > 0.$$

En substituant à a, b, c leurs valeurs, on trouve que la première peut s'écrire

$$(5 \ bis) \qquad (n-1)\sum \frac{m_1}{d_1^{i+2}} < 0,$$

ce qui entraîne $n < 1$.

La transformation des deux dernières inégalités exige des calculs un peu longs, mais qui se présentent sous une forme parfaitement symétrique, et, d'ailleurs, les résultats sont fort simples.

On voit sans peine que l'on a, en posant $D = \sum \frac{m_1}{d_2^{n+2}}$,

$$f^2 - bc = -\sum \frac{m_1 m_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2}{(d_1 d_2)^{n+4}} + D \sum \frac{m_1}{d_1^{n+4}} [(n+1)(y_1^2 + z_1^2) - x_1^2],$$

$$g^2 - ca = -\sum \frac{m_1 m_2 (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2}{(d_1 d_2)^{n+4}} + D \sum \frac{m_1}{d_1^{n+4}} [(n+1)(z_1^2 + x_1^2) - y_1^2],$$

$$h^2 - ab = -\sum \frac{m_1 m_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(d_1 d_2)^{n+4}} + D \sum \frac{m_1}{d_1^{n+4}} [(n+1)(x_1^2 + y_1^2) - z_1^2].$$

En ajoutant membre à membre, on voit que l'inégalité (6) devient

$$\sum \frac{m_1 m_2}{(d_1 d_2)^{n+4}} [(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2] - (2n+1) D^2 > 0.$$

On voit que cette inégalité sera satisfaite si $2n + 1 < 0$ ou $n \leq -\frac{1}{2}$.

Cette inégalité (6) peut, d'ailleurs, s'écrire sous la forme beaucoup plus simple

$$(6\,bis) \qquad \sum \frac{m_1 m_2 \sin^2 (d_1 d_2)}{(d_1 d_2)^{n+2}} - (2n+1) D^2 > 0,$$

$(d_1 d_2)$ désignant l'angle des deux directions OA_1 et OA_2 qui joignent l'origine aux points A_1 et A_2.

La transformation de la troisième inégalité est un peu plus longue; mais, si l'on ordonne le premier membre relativement aux puissances décroissantes de $n + 2$, on trouve qu'elle se réduit à

$$
(7\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-(n+2)^3 \sum \frac{m_1 m_2 m_3}{(d_1 d_2 d_3)^{n+4}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 \\
&\quad + (n+2)^2 \mathrm{D} \sum \frac{m_1 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1 d_2)^{n+2}} - (n+2)\mathrm{D}^3 + \mathrm{D}^3 > 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Sous cette forme, on voit clairement que l'inégalité sera satisfaite si l'on prend des valeurs de n telles que

$$n + 2 \quad 0.$$

On sait, d'ailleurs, que l'équilibre est stable pour $n = -2$ ou pour $n + 1 = -1$, car les forces attractives sont proportionnelles aux distances et tout se passe dans ce cas comme si l'on substituait aux points $A_1, A_2, \ldots$ le centre de gravité du système et comme si la masse de tous les points y était concentrée.

On peut, en transformant encore l'inégalité précédente, montrer qu'elle sera satisfaite toutes les fois que $n + 1$ sera plus petit que zéro ou égal à zéro.

Remarquons, d'abord, que $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ représente six fois le volume du tétraèdre qui a pour sommets l'origine et les trois points A_1, A_2, A_3; soit V ce volume; remarquons, en outre, que $d_3 d_1 d_2 \sin(d_1 d_2)$ représente une quantité plus grande que 6V; si l'on désigne par α l'angle formé par l'arête d_3 ou OA_3 avec le plan OA_1A_2 formé par les arêtes d_1 et d_2, on aura

$$d_3 d_1 d_2 \sin(d_1 d_2) = \frac{6\mathrm{V}}{\sin\alpha};$$

d'après cela, l'inégalité (7) pourra s'écrire

$$(n+2)^2 \sum \frac{m_1^2 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1^2 d_2)^{n+2}} - (n+1) D^3$$
$$+ (n+2)^2 \sum \frac{m_1 m_2 m_3}{(d_1 d_2 d_3)^{n+4}} \left[\frac{6^2 V^2}{\sin^2 \alpha} - 6^2 V^2 (n+2) \right] > 0,$$

ou enfin

$$(7\,ter) \left\{ \begin{array}{l} (n+2)^2 \sum \dfrac{m_1^2 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1^2 d_2)^{n+2}} - (n+1) D^3 \\ \quad + (n+2)^2 \sum \dfrac{m_1 m_2 m_3 . 36 V^2}{(d_1 d_2 d_3)^{n+4} \sin^2 \alpha} [\cos^2 \alpha - (n+1) \sin \alpha] > 0. \end{array} \right.$$

Or, sous cette dernière forme, on voit bien clairement que l'inégalité sera satisfaite pour des valeurs de n telles que

$$n + 1 \quad 0.$$

On conclut de là que les trois inégalités (5), (6), (7) seront toujours satisfaites toutes les fois que $n \leq -1$, quels que soient les déplacements du point attiré autour de sa position d'équilibre, c'est-à-dire que l'équilibre sera stable d'une manière absolue. Si les trois inégalités ne sont pas satisfaites simultanément, l'équation du troisième degré en r^2 aura au moins une racine positive; x, y, z s'exprimeront par des exponentielles et l'équilibre sera instable; c'est ce qui arriverait, par exemple, pour $n = 1$, c'est-à-dire dans le cas de l'attraction newtonienne.

On aurait pu traiter cette question d'une autre manière. On sait, en effet, que l'équilibre est stable si la fonction φ passe par un maximum, et que l'équilibre est instable si φ passe par un minimum. Or, il est facile de voir que l'on a, en négligeant les termes du troisième degré en x, y, z,

$$\frac{1}{u_1^n} = \frac{1}{d_1^n}\left[1 - \frac{n}{2}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{d_1^2} + \frac{n(n+2)}{2}\,\frac{(xx_1+yy_1+zz_1)^2}{d_1^4}\right]^{-\frac{n}{2}},$$

d'où

$$\varphi = \sum \frac{m_1}{n d_1^n} + a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y.$$

La question se trouve donc ramenée à celle-ci : trouver les conditions pour que le polynôme homogène du second degré $ax^2 + by^2 + \ldots$ soit constamment négatif. On est ainsi conduit aux trois inégalités (5), (6) et (7) déjà trouvées.